ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ตอนที่ ๓

น.อ.ผศ. ภาณุฤทธิ์ ยุกตะทัต

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ฝ่ายศึกษา โรงเรียนนายเรือ

ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ตอนที่ ๑ ผู้เขียนได้อธิบายให้เข้าใจขั้นตอนในการหาผลลัพธ์ด้วยการจำลองระบบ โดยการสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้อง จากนั้นจึงแปลงเป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ กำหนดเงื่อนไขขอบเขต หาผลลัพธ์ เพื่อให้วิศวกรผู้ออกแบบมีแนวคิดในการแก้ไขปรับปรุงต้นแบบจำลองการทำงานด้วยการปรับเปลี่ยนเงื่อนไขขอบเขต หรือปรับปรุงรูปร่างของผลิตภัณฑ์ เพื่อให้ได้ประสิทธิภาพดีที่สุด ส่วนในตอนที่ ๒ ได้ยกตัวอย่างการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อน เพื่ออธิบายการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ สำหรับในตอนที่ ๓ นี้ จะยกตัวอย่างการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของของแข็งเมื่อได้รับโหลดแบบต่าง ๆ

วิเคราะห์ของแข็ง

ของแข็งแบบยืดหยุ่นได้ (Elasticity) นับว่าเป็นปัญหาชนิดแรกที่ถูกนำมาวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ทั้งนี้เนื่องจาก งานออกแบบทางวิศวกรรมล้วนเกี่ยวข้องกับโครงสร้างที่มีรูปร่างซับซ้อน การใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ของแข็งแบบยืดหยุ่นได้ใน ๒ มิติ จะเริ่มจากสมการเชิงอนุพันธ์ของความสมดุลในแผ่นระนาบรูปร่างลักษณะใด ๆ

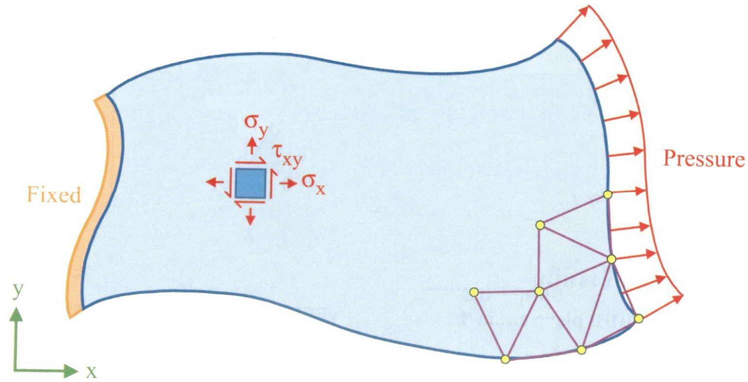
สมการเชิงอนุพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งอธิบายความสมดุลของแรงในแนวแกน x และ y บนแผ่นระนาบ เมื่อไม่คิดน้ำหนักของตัวเอง คือ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

โดย σ_x และ σ_y คือ ความเค้นฉาก (Normal Stress) ในแนวแกน x และแกน y ตามลำดับ

τ_{xy} คือ ค่าความเค้นเฉือน (Shearing Stress)



รูปที่ ๑ โดเมนและเงื่อนไขของแผ่นระนาบ

ในกรณีของแผ่นบางซึ่งเป็นปัญหาความเค้นในระนาบ (Plane stress) ค่าความเค้น σ_z ในแนวตั้งฉากกับแกน z จึงถูกสมมติให้มีค่าเท่ากับศูนย์ ส่วนค่าความเค้นย่อยต่าง ๆ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของค่าความเครียดได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \text{———} (2)$$

โดย E คือค่าโมดูลัสของยัง (Young's modulus) หรือโมดูลัสของความยืดหยุ่น

ν คือค่าอัตราส่วนปัวซอง (Poission's ratio)

ε_x และ ε_y คือ ความเครียดฉาก (Normal Strain) ในแนวแกน x และแกน y ตามลำดับ

γ_{xy} คือ ค่าความเครียดเฉือน (Shearing Strain)

ค่าความเครียดเหล่านี้เขียนให้อยู่ในรูปแบบของค่าการเสียรูป u และ v ในแนวแกน x และแกน y ได้ คือ

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \;:\; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \;:\; \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \text{ ——— } (3)$$

ซึ่งหมายความว่า ตัวไม่รู้ค่า (Unknown) ในระนาบมี 2 ค่า คือค่าการเสียรูป u และ v เมื่อทราบค่า u และ v แล้ว จะสามารถนำไปคำนวณค่าความเครียดและความเค้นย่อยต่าง ๆ ได้ ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของปัญหาของแข็งในระนาบจึงประกอบด้วยสมการย่อย 2 สมการ แต่มักเขียนในรูปของค่าความเค้นย่อย ดังสมการที่ (1)

สำหรับปัญหาที่ค่าความเครียดในแนวแกน z ถูกสมมติให้มีค่าเป็นศูนย์ (Plane Strain) สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับค่าการเสียรูป ยังคงใช้สมการที่ (1) และ

สมการที่ (3) ได้เช่นเดิม แต่สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นย่อยและความเครียดย่อย [สมการที่ (2)] ต้องเปลี่ยนเป็น

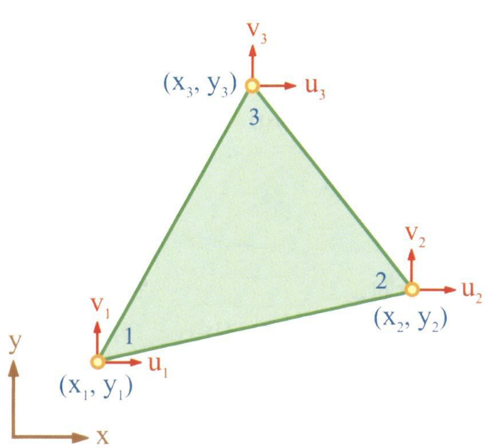
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ดังนั้นผู้วิเคราะห์จึงจำเป็นต้องตระหนักถึงชนิดของปัญหาว่าเป็นปัญหาแบบ Plane Stress หรือ Plane Strain ก่อนที่จะทำการวิเคราะห์ โดยซอฟต์แวร์ EasyFEM จะให้ผู้ใช้เลือกชนิดของปัญหาก่อนที่จะทำการวิเคราะห์ทุกครั้ง

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตโดยทั่วไป จะประกอบด้วยการยึดแน่น (Fixed) หรือปล่อยอิสระ (Free) ตลอดขอบต่าง ๆ รวมทั้งอาจกำหนดค่าแรงดัน (Pressure) ซึ่งแทนค่าแรงที่กระทำต่อพื้นที่ตลอดขอบนั้น ๆ ได้ อย่างไรก็ตามผู้ใช้จะต้องระวังที่จะไม่ประยุกต์แรงเดี่ยว ณ เพียงจุดใดจุดหนึ่ง สำหรับการวิเคราะห์ปัญหา เพราะจะทำให้ค่าความเค้นบริเวณนั้นสูงขึ้นไปไม่มีที่สิ้นสุดหลังจากพยายามลดขนาดของเอลิเมนต์ลง

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถประดิษฐ์ได้โดยตรงจากสมการเชิงอนุพันธ์ [สมการที่ (1)] ด้วยการใช้ method of weight residuals ก่อให้เกิดสมการในรูปแบบของอินทริกัล (Integral form) บนพื้นที่ของเอลิเมนต์ การเลือกใช้เอลิเมนต์ชนิดต่างกันจะนำไปสู่ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ที่แตกต่างกัน เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมแบบ 3 โหนด ดังแสดงตามรูปที่ ๒ จัดว่าเป็นเอลิเมนต์พื้นฐานที่ช่วยให้เข้าใจง่าย และสะดวกต่อการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์



รูปที่ ๒ เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ ๓ โหนด

ลักษณะการกระจายของค่าการเสียรูป u และ v ในเอลิเมนต์บนแผ่นเรียบ (Flat plane) คือ

$$\begin{aligned} u(x,y) &= N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 \\ v(x,y) &= N_1v_1 + N_2v_2 + N_3v_3 \end{aligned} \quad \text{——— (5)}$$

โดย $N_i : i = 1, 2, 3$ แทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ (Interpolation Function) ซึ่งคือ

$$N_i(x,y) = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \quad \text{——— (6)}$$

เมื่อ A คือพื้นที่ของเอลิมนต์สามเหลี่ยม และ a_i, b_i, c_i ขึ้นอยู่กับโคออดิเนต x_i และ y_i ที่โหนด i ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยตรงจากตำแหน่งของโหนด ที่เกิดขึ้นหลังจากสร้างรูปแบบของไฟไนต์เอลิเมนต์แล้ว ดังนี้

$$A = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \quad \text{——— (7)}$$

โดยสัมประสิทธิ์

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2 \quad & b_1 &= y_2 - y_3 \quad & c_1 &= x_3 - x_2 \\ a_2 &= x_3y_1 - x_1y_3 \quad & b_2 &= y_3 - y_1 \quad & c_2 &= x_1 - x_3 \\ a_3 &= x_1y_2 - x_2y_1 \quad & b_3 &= y_1 - y_2 \quad & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \quad \text{——— (8)}$$

หลังจากประยุกต์ใช้ Method of weight residuals เข้ากับสมการเชิงอนุพันธ์ [สมการที่ (1)] และใช้การกระจายของการเสียรูปสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ [สมการที่ (5) และ (6)] ก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ [1, 8, 11] ดังนี้

$$\underset{(6\times 6)}{[K]}\ \underset{(6\times 1)}{\{\delta\}} = \underset{(6\times 1)}{\{F\}} \quad \text{——— (9)}$$

โดย **[K]** คือเมตริกซ์ของความแข็งเกร็ง คือ

$$\underset{(6\times 6)}{[K]} = \underset{(6\times 3)}{[B]^T}\ \underset{(3\times 3)}{[C]}\ \underset{(3\times 6)}{[B]}\, t\, A \quad \text{——— (10)}$$

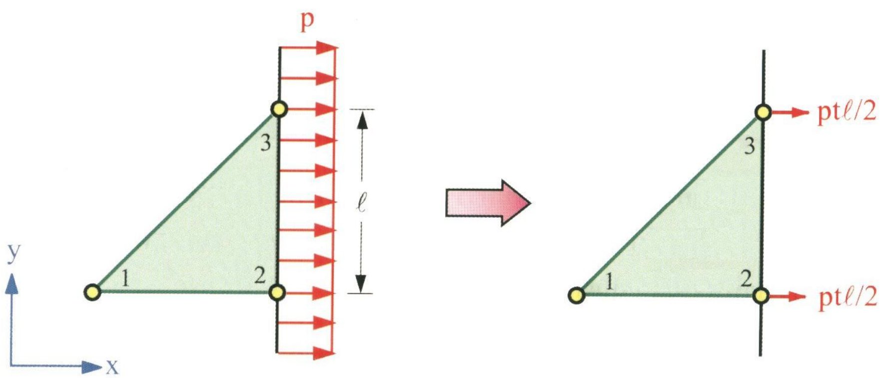
[B] คือเมตริกซ์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและค่าการเสียรูป คือ

$$[B] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad \text{——— (11)}$$

[C] คือ เมตริกซ์ขนาด 3×3 ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดดังสมการที่ (2) หรือสมการที่ (4) สำหรับกรณี Plane Stress หรือ Plane Strain ตามลำดับ ส่วนค่า t คือความหนาของแผ่นระนาบ ในกรณีของ Plane Stress ส่วนในกรณีของ Plane Strain กำหนดให้มีค่าเท่ากับ 1

$\{\delta\}$ คือ เวกเตอร์ที่ประกอบด้วยค่าการเสียรูป u และ v ที่โหนดทั้งสามบนเอลิเมนต์ คือ

$$\lfloor \delta \rfloor = \lfloor u_1 \; v_1 \; u_2 \; v_2 \; u_3 \; v_3 \rfloor \text{———— } (12)$$



รูปที่ ๓ การเปลี่ยนแปลงของแรงดึงตลอดขอบไปสู่โหนด

{F} คือ เวกเตอร์โหลด ซึ่งเกิดขึ้นจากแรงดันที่กำหนดให้ตามขอบ ตัวอย่างเช่นเอลิเมนต์ในรูปที่ ๓ มีโหนดหมายเลข 2 และ 3 บนขอบที่ตั้งฉากกับแนวแกน x และหากขอบนี้ถูกกระทำด้วยแรงดึงต่อพื้นที่ซึ่งมีค่าเท่ากับ p แล้ว เวกเตอร์ {F} ของเอลิเมนต์ที่ติดอยู่กับขอบ คือ

$$\lfloor F \rfloor = \lfloor 0 \; 0 \; Pt\ell/2 \; 0 \; Pt\ell/2 \; 0 \rfloor \text{——— } (13)$$

อย่างไรก็ตาม หากขอบที่มีแรงกระทำต่อพื้นที่มากระทำนี้เป็นมุมเอียง โดยไม่ตั้งฉากกับแกน x หรือ y หลักการข้างต้นนี้ยังสามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้ในทำนองเดียวกัน

หลังจากสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของแต่ละเอลิเมนต์ขึ้นแล้ว จึงนำสมการเหล่านี้มารวมกันให้เป็นระบบสมการขนาดใหญ่ จากนั้นจึงประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดสำหรับปัญหานั้น ๆ เช่น บางโหนดอาจถูกตรึงแน่นทั้งในแนวแกน x และแกน y บางโหนดอาจถูกตรึงในแนวแกน y เพียงทิศทางเดียว ขณะที่ยังสามารถเคลื่อนตัวในแนวแกน x ได้ เมื่อประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ แล้ว จึงแก้ระบบสมการขนาดใหญ่เพื่อหาค่าการเสียรูป u และ v ของทุก ๆ โหนด

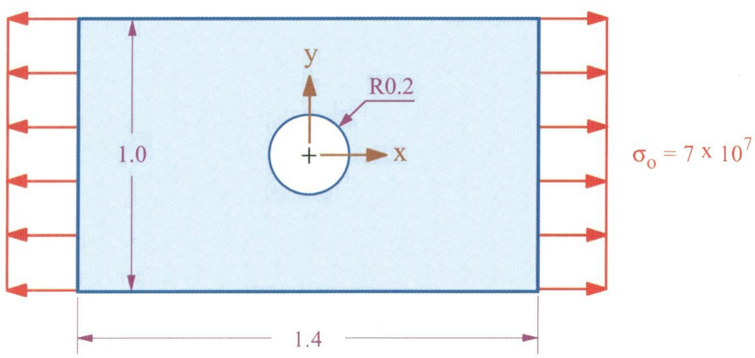
เมื่อทราบค่าการเสียรูป u และ v ของทุกโหนดแล้ว จะสามารถหาค่าความเครียด $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ ได้โดยใช้สมการที่ (3) ผสมผสานกับสมการที่ (5) แล้วจึงหาค่าความเค้นย่อย $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ของแต่ละเอลิเมนต์โดยใช้สมการที่ (2) หรือสมการที่ (4) แล้วแต่ว่าเป็นกรณี Plane Stress หรือ Plane Strain ตามลำดับ ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการสั้น ๆ ได้ คือ

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \underset{(3\times 3)}{[C]} \; \underset{(3\times 6)}{\{B\}} \; \underset{(6\times 1)}{\{\delta\}} \qquad (14)
$$

ค่าความเค้นย่อยที่คำนวณได้จากสมการที่ (14) นี้มีค่าคงที่สำหรับแต่ละเอลิเมนต์ ค่าซึ่งคงที่นี้อาจจะกระจายไปยังโหนดต่าง ๆ เพื่อการแสดงผลให้สอดคล้องกับความเป็นจริงต่อไป

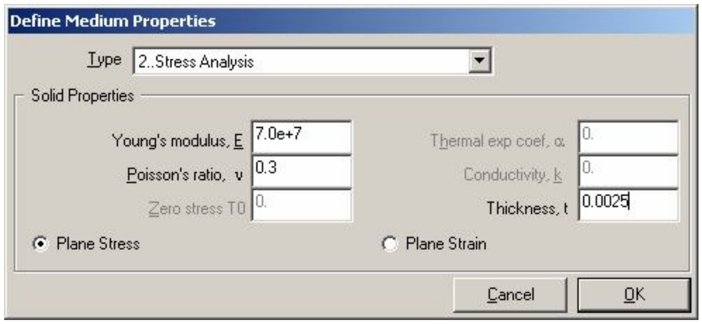
ปัญหาการเสียรูปในแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีรูเจาะตรงกลาง

สมมติว่าต้องการวิเคราะห์การเสียรูปของแผ่นโลหะรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 1.4×1 เมตร หนา 0.0025 เมตร มีรูเจาะวงกลมตรงกลางขนาดรัศมี 0.2 เมตร ถูกดึงตลอดขอบทั้งสองข้างด้วยแรงขนาด 7×10^7 นิวตันต่อตารางเมตร โดยแผ่นเหล็กมีค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น หรือโมดูลัสของยัง (Young's modulus) เท่ากับ 7×10^7 นิวตันต่อตารางเมตร และอัตราส่วนปัวซอง (Poisson's Ratio) เท่ากับ 0.3 ดังแสดงตามรูปที่ ๔



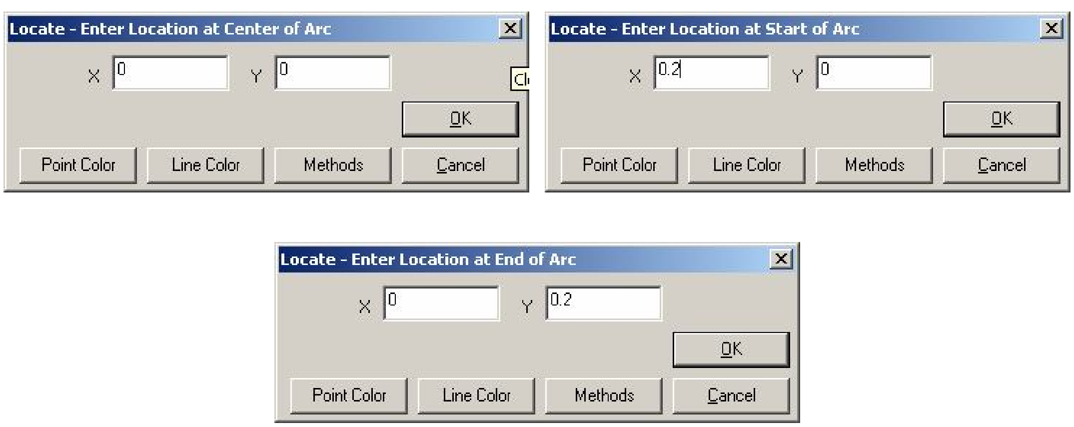
รูปที่ ๔ ปัญหาแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีรูเจาะตรงกลางถูกดึงออกทั้ง ๒ ด้าน

เมื่อทราบปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ ขั้นตอนแรกในกระบวนการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ คือ เมื่อเปิดโปรแกรม EasyFEM ขึ้นมาก็ต้องกำหนดพื้นที่สำหรับการสร้างแบบจำลองเพื่อวิเคราะห์ปัญหา โดยใช้คำสั่ง File $\rightarrow$ New จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ Define Medium Properties ซึ่งเป็นกล่องสนทนาสำหรับใส่คุณสมบัติของวัสดุ สำหรับปัญหาการวิเคราะห์ของแข็ง ให้เลือกที่ Stress Analysis จากนั้นให้ทำการกรอกค่าโมดูลัสของยังเท่ากับ 7.0e+7 ลงในช่อง Young's modulus, E ค่าอัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.3 ลงในช่อง Poisson's ratio, ν และความหนา 0.0025 ลงในช่อง Thickness, t คลิกที่ปุ่มเลือก Plane Stress แล้วคลิก OK ดังรูปที่ ๕



รูปที่ ๕ ไดอะล็อกบ๊อกซ์ Define Medium Properties

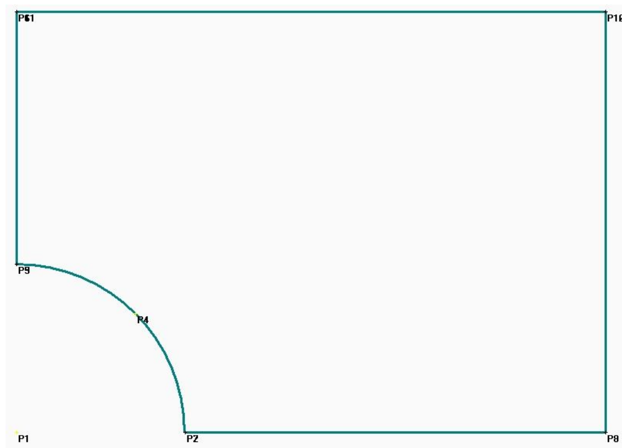
ลำดับต่อไปเป็นขั้นตอนการสร้างโมเดล เนื่องจากปัญหานี้แผ่นโลหะสี่เหลี่ยมเจาะรูตรงกลางมีความสมมาตรทั้ง ๒ ทิศทาง จึงสามารถเลือกสร้างโมเดลเพื่อทำการวิเคราะห์เพียง ? หรือเฉพาะพื้นที่ส่วนบนด้านขวาของโมเดล โดยเริ่มจากการสร้างส่วนโค้ง A1 ด้วยคำสั่ง Create → Arc → Center-Start-End และกำหนดพิกัดของจุดศูนย์กลาง จุดเริ่มต้น และจุดสิ้นสุด เท่ากับ (0, 0), (0.2, 0.0) และ (0.0, 0.2) ตามลำดับ ดังแสดงตามรูปที่ ๖



รูปที่ ๖ การกำหนดจุดศูนย์กลาง จุดเริ่มต้น และจุดสิ้นสุดของส่วนโค้ง A1

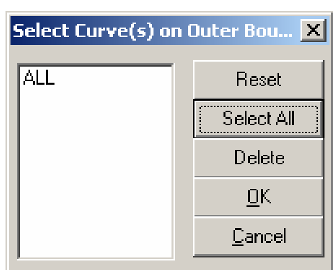
ถัดไปเป็นการสร้างเส้นตรงแนวตั้ง L2 ด้วยคำสั่ง Create → Line → Vertical โดยเลือกจุด P3 (0.0, 0.2) และกำหนดความยาวเท่ากับ 0.3 จากนั้นสร้างเส้นตรงแนวนอน L3 ด้วยคำสั่ง Create → Line → Horizontal โดยเลือกจุด P2 (0.2, 0.0) และกำหนดความยาวเท่ากับ 0.5 และสร้างเส้นตรงแนวตั้ง L4 ด้วยคำสั่ง Create → Line → Vertical อีกครั้งโดยเลือกจุด P8 (0.7, 0.0) และกำหนด

ความยาวเท่ากับ 0.5 สุดท้ายเป็นการสร้างเส้นตรงแนวนอน L5 เพื่อปิดรูปเหลี่ยม ด้วยคำสั่ง Create → Line → Project Point โดยเลือกจุด P6 และ P10 จะได้โมเดลตามรูปที่ ๗



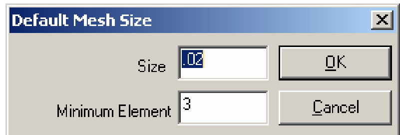
รูปที่ ๗ การสร้างโมเดลเพียงหนึ่งในสี่ของพื้นที่ทั้งหมด

จากนั้นให้กำหนดขอบเขตโดเมน โดยการใช้คำสั่ง Mesh → Define Boundary และคลิกเลือกที่ปุ่ม Select All ในไดอะล็อกบ๊อกซ์ Select Curve(s) on Outer Boundary ดังรูปที่ ๘



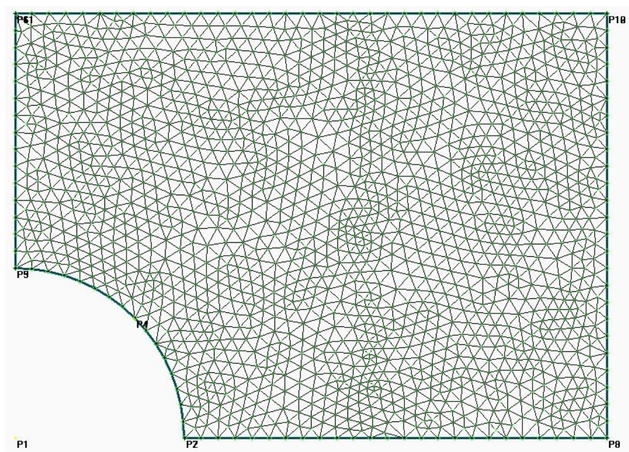
รูปที่ ๘ ไดอะล็อกบ๊อกซ์ Select Curve(s) on Outer Boundary

สำหรับตัวอย่างนี้จะใช้วิธีสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบไร้ระเบียบ โดยเริ่มจากการกำหนดขนาดเอลิเมนต์ตามขอบเขตโมเดล ด้วยการใช้คำสั่ง Mesh → Mesh Size → Default จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ Default Mesh Size ดังรูปที่ ๙ ให้กำหนดค่า 0.2 ลงในช่อง Size และใส่ค่า 3 ลงในช่อง Minimum Element แล้วคลิก OK



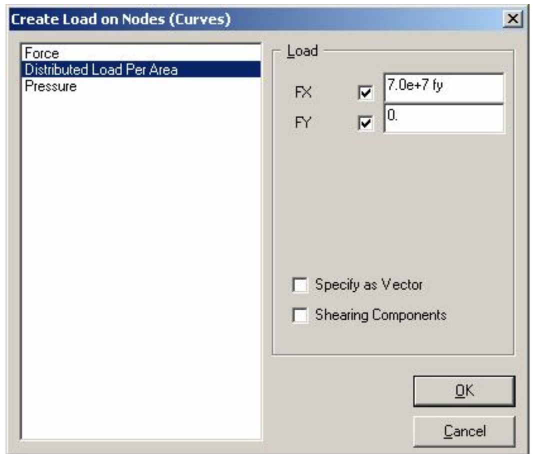
รูปที่ ๙ ไดอะล็อกบ๊อกซ์ Default Mesh Size

เมื่อเลือกใช้คำสั่ง Mesh → Unstructured Mesh โปรแกรม EasyFEM จะทำการสร้างเมส ดังรูปที่ ๑๐



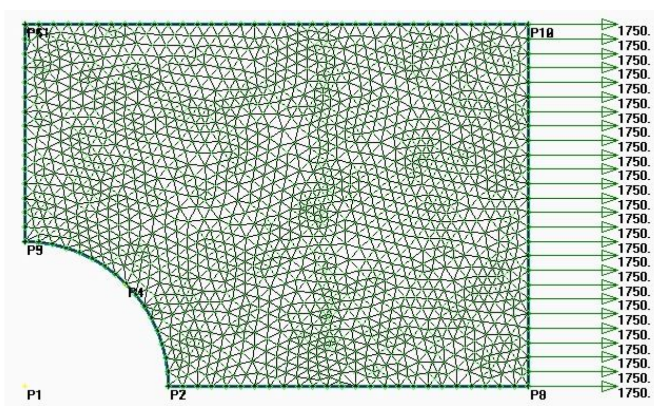
รูปที่ ๑๐ การแบ่งโมเดลด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบไร้ระเบียบ

จากนั้นก็เป็นขั้นตอนการกำหนดโหลดตามขอบของโมเดล สำหรับตัวอย่างนี้กำหนดให้แรงดึงต่อพื้นที่มีค่าเท่ากับ 7.0×10^7 ตลอดขอบด้านขวาของโมเดล ให้ใช้คำสั่ง Create → Load → On Node (Curves specified) ให้เลือกเส้นตรง L4 ทางด้านขวามือ จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ Create Load on Node (Curves) ให้เลือกรายการ Distributed Load Per Area แล้วใส่ค่า 7.0e+7 ลงในช่อง FX และใส่ค่า 0 ลงในช่อง FY ดังแสดงตามรูปที่ ๑๑



รูปที่ ๑๑ ไดอะล็อกบ๊อกซ์ Create Load on Nodes (Curves)

เมื่อคลิก OK โปรแกรมจะทำการสร้างโหลดบนจุดต่อทั้งหมดที่อยู่บนเส้นตรง L4 ด้านขวามือ ดังรูปที่ ๑๒

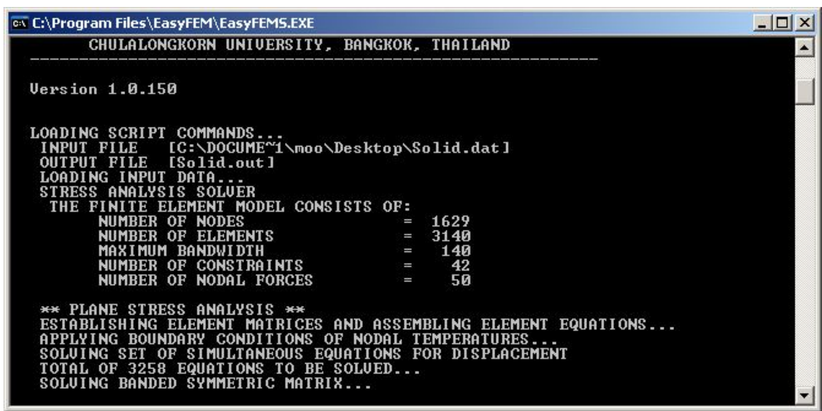


รูปที่ ๑๒ การกำหนดแรงดึงที่โหนดบนขอบด้านขวาของโมเดล

สำหรับการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต เนื่องจากเราทำการสร้างโมเดลแบบสมมาตรเพียงหนึ่งในสี่ ดังนั้นจึงต้องกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแบบสมมาตรในแนวแกน x ตามขอบซ้ายมือของโมเดล และเงื่อนไขขอบเขตแบบสมมาตรตามแนวแกน y ตามขอบล่างของโมเดล โดยใช้คำสั่ง Create → Constraint → On Node และเลือกโหลดทั้งหมดตามขอบซ้ายมือของโมเดล (โหนดบนเส้นตรง L2) และกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแบบสมมาตรตามแนวแกน x โดยการคลิกที่ปุ่มคำสั่ง x Symmetry แล้วคลิกที่ปุ่ม OK จากนั้นทำซ้ำในแนวแกน y โดยใช้คำสั่ง Create → Constraint → On Node และเลือกโหลดทั้งหมดตามขอบ

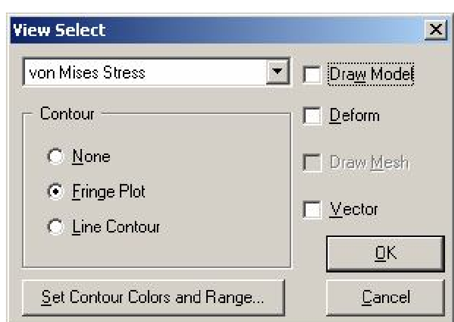
ล่างของโมเดล (โหนดบนเส้นตรง L3) และกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแบบสมมาตรตามแนวแกน y โดยการคลิกที่ปุ่มคำสั่ง y Symmetry แล้วคลิกที่ปุ่ม OK เป็นอันเสร็จขั้นตอนในกระบวนการขั้นต้น (Pre-Processor)

ขั้นตอนต่อไปเป็นกระบวนการวิเคราะห์ปัญหา สามารถทำได้โดยใช้คำสั่ง File → Analyze จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ Export Analyze Data ให้คลิกที่ปุ่ม OK เพื่อทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยโปรแกรม EasyFEM ในระหว่างการวิเคราะห์โปรแกรมจะเรียกส่วนวิเคราะห์ที่เรียกว่า EasyFEMS มาทำงาน จะเห็นว่าปรากฏเป็นหน้าต่างการวิเคราะห์ ดังแสดงตามรูปที่ ๑๓ ซึ่งหน้าต่างนี้จะปิดลงเมื่อวิเคราะห์เสร็จ

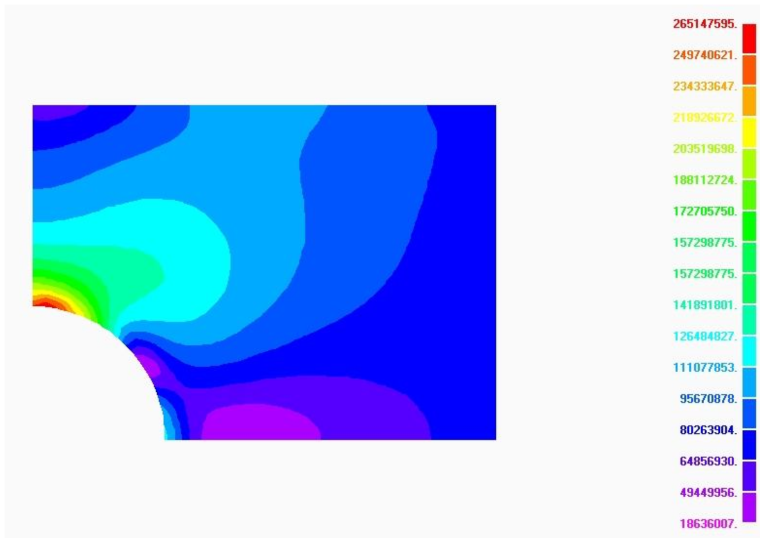


รูปที่ ๑๓ หน้าต่างการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม EasyFEMS

ในกระบวนการขั้นท้ายของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ คือ การแสดงผลลัพธ์ สามารถทำได้โดยใช้คำสั่ง View → Select จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ View Select ให้เลือกการแสดงผลลัพธ์ตามที่ต้องการ ทดลองเลือกที่ Von Mises Stress แล้วคลิกเลือกที่ Fringe Plot ดังรูปที่ ๑๔ แล้วคลิก OK เพื่อแสดงผลด้วยแถบชั้นสีของอุณหภูมิแบบ ๓๒ ระดับสี

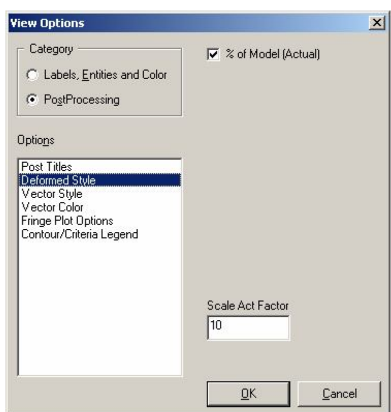


รูปที่ ๑๔ ไดอะล็อกบ๊อกซ์ View Select



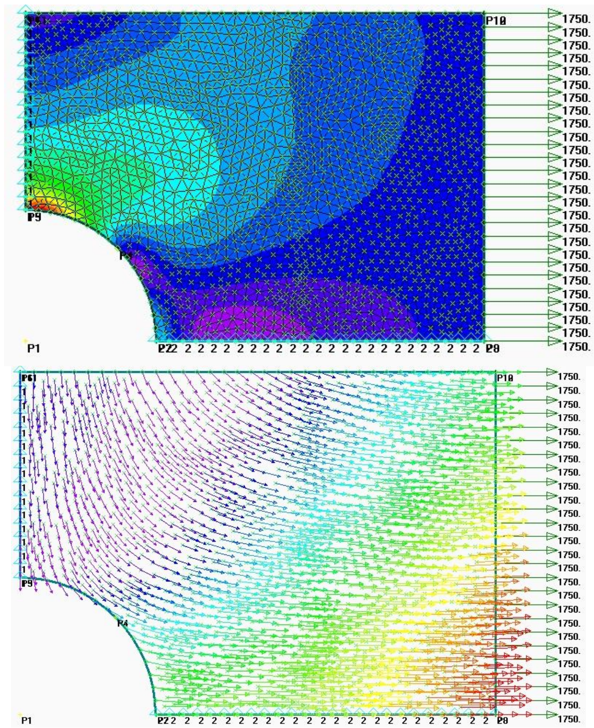
รูปที่ ๑๕ การแสดงผลลัพธ์การกระจายของความเค้นวอนมิสเซสด้วยแถบชั้นสี

หรือหากต้องการแสดงผลลัพธ์ด้วยแถบชั้นสีพร้อมกับการเสียรูป สามารถกำหนดขนาดของการเสียรูปได้จากคำสั่ง View → Option จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ View Options ดังแสดงตามรูปที่ ๑๖



รูปที่ ๑๖ ไดอะล็อกบ๊อกซ์ View Options

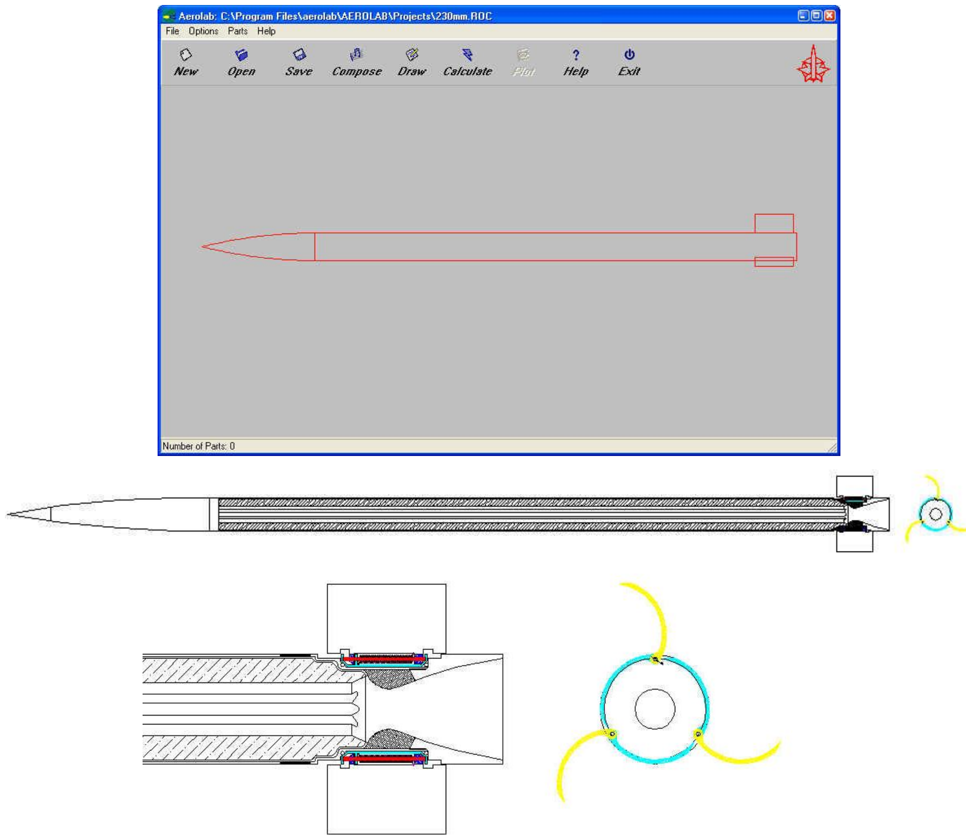
จากนั้นให้เลือกที่ PostProcessing แล้วคลิกเลือกที่ Deformed Style ก็จะได้ผลลัพธ์เป็นแถบชั้นสีร่วมกับขนาดของการเสียรูป ดังแสดงตามรูปที่ ๑๗ สำหรับการเลือกแสดงผลแบบต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นแบบเวกเตอร์ หรือเวกเตอร์สีก็สามารถเลือกได้ที่ไดอะล็อกบ๊อกซ์ View Options นี้ได้



รูปที่ ๑๗ การกระจายของความเค้นวอนมิสเซสด้วยแถบชั้นสีร่วมกับการเสียรูป และทิศทางการเคลื่อนตัวของแต่ละโหนดด้วยเวกเตอร์สี

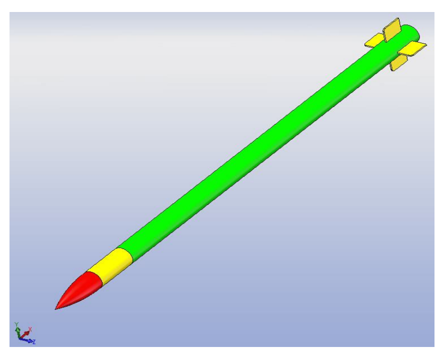
การประยุกต์ใช้งาน

ผู้เขียนได้มีโอกาสทดลองวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนภายในลูกจรวดระยะยิงไกลตามแบบที่ ศวอ.ทอ. ซึ่งมีการคำนวณขนาด ตามระยะยิงที่ต้องการ ได้ออกแบบไว้ ดังรูป

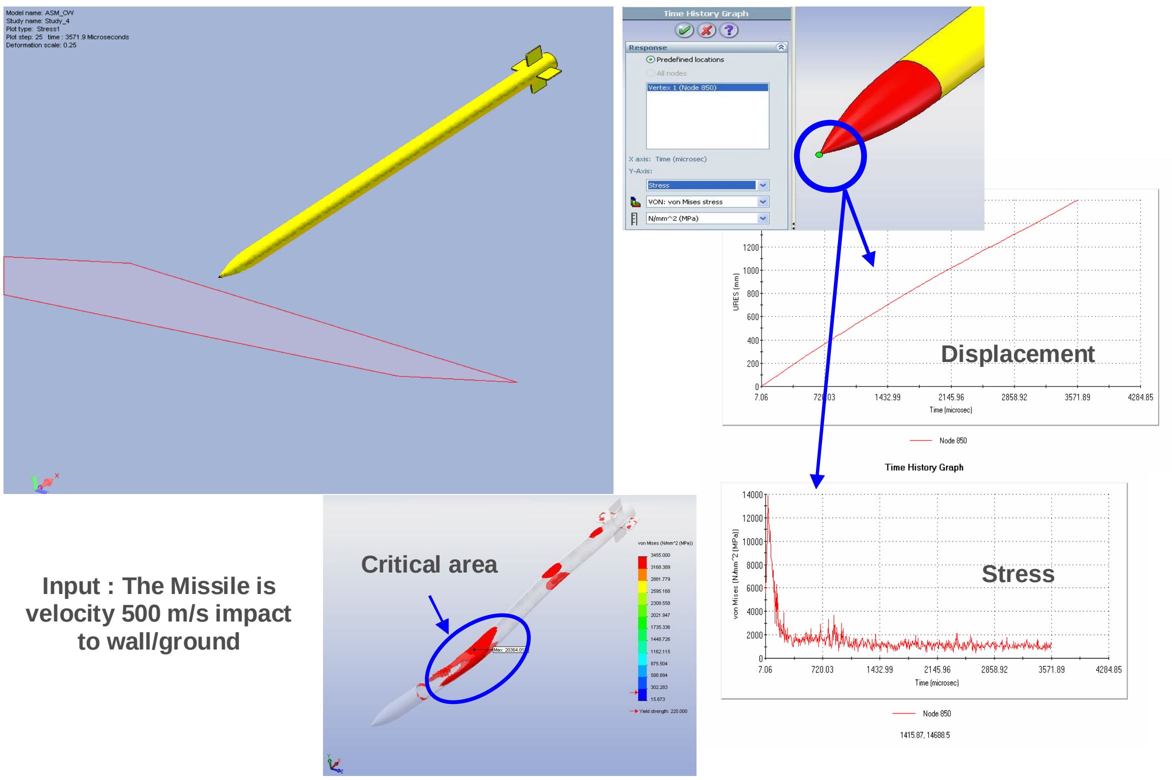


รูปที่ ๑๘ การออกแบบด้วยโปรแกรม AeroLab

ในการวิเคราะห์เริ่มจากการสร้างโมเดล ของจรวดระยะยิงไกล แต่เนื่องจากรูปร่างของปัญหามีความซับซ้อน โปรแกรม EasyFEM จึงไม่เหมาะแก่การใช้งาน ในที่นี้เลือกใช้ซอฟต์แวร์ SolidWork ในการสร้างแบบจำลอง เพราะมีความสามารถในการเข้ากันได้กับซอฟต์แวร์ในการวิเคราะห์ที่เลือกใช้ คือ COSMOS (มีซอฟต์แวร์เป็นจำนวนมากในท้องตลาด ในการเลือกใช้ขึ้นอยู่กับความต้องการและความถนัดของผู้ใช้) ในเบื้องต้นเป็นการวิเคราะห์ความแข็งแรงของลูกจรวดขณะกระแทก



รูปที่ ๑๙ การสร้างโมเดลของจรวดระยะยิงไกล



รูปที่ ๒๐ การวิเคราะห์ความเค้นด้วยโมดูล Drop Test

บทสรุป

จากการที่ได้อธิบายการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งแบบยืดหยุ่นได้ใน ๒ มิติ ด้วยการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยใช้ซอฟต์แวร์ EasyFEM ช่วยให้ผู้อ่านสามารถเห็นผลลัพธ์ได้โดยง่าย โดยเริ่มจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่บ่งบอกว่าผลรวมของแรงจำเป็นต้องอยู่ในสภาวะสมดุลในทุก ๆ ตำแหน่งของปัญหานั้น และสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์นี้ก็สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยง่ายโดยเฉพาะการเลือกใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมที่นำไปสู่ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ในรูปแบบง่ายๆ นอกจากนั้นหากผู้อ่านผ่านการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ทางวิศวกรรมชั้นสูง ย่อมตระหนักได้เป็นอย่างดีว่าการได้มาซึ่งความเที่ยงตรงแม่นยำของผลลัพธ์สำหรับปัญหารูปร่างลักษณะอย่างง่าย และประกอบด้วยเงื่อนไขขอบเขตอย่างง่าย ยังเป็นสิ่งที่ทำได้ยากลำบากและใช้เวลานาน การแก้ปัญหาด้วยซอฟต์แวร์ไฟไนต์เอลิเมนต์จึงช่วยนักวิเคราะห์ได้เป็นอย่างมาก โดยเฉพาะในกรณีที่รูปร่างลักษณะของปัญหามีความยุ่งยากซับซ้อนภายใต้เงื่อนไขขอบเขตที่แตกต่างกัน ผลลัพธ์ที่ปรากฏบนหน้าจอคอมพิวเตอร์จะช่วยให้ผู้วิเคราะห์เข้าใจถึงปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นบนปัญหานั้นได้อย่างรวดเร็ว ความเข้าใจโดยลึกซึ้งดังกล่าวสามารถที่จะปรับเปลี่ยนรูปร่างลักษณะของการออกแบบ เพื่อลดความเค้นที่เกิดขึ้น ลดปริมาณเนื้อวัสดุที่ต้องใช้ ในขณะที่ยังคงให้ประสิทธิภาพในการใช้งานที่สูงเช่นเดิม และที่สำคัญที่สุดคือผู้วิเคราะห์สามารถที่จะออกแบบได้ด้วยความมั่นใจ เนื่องจากมีความเข้าใจกระบวนการทั้งหมดอย่างเป็นขั้นตอนตั้งแต่ต้นจนจบ

เอกสารอ้างอิง

ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ***ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม.*** สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, ๒๕๔๗.

ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ***ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม.*** สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, ๒๕๔๖.

ศูนย์บริการปรึกษาการออกแบบและวิศวกรรม (DECC). ***ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ขั้นพื้นฐาน.*** ๒๕๕๐.

สวพ.กห.. ***รายงานความก้าวหน้าโครงการจรวดเพื่อความมั่นคงระยะที่ ๑.*** ๒๕๕๐.

University of Corolado, Dept. of Aerospace Eng.. ***Introduction to FEM.*** 2005.