

สนุกคิดกับคณิตศาสตร์ (3)

การคูณเลขสองจำนวนโดยการบวก

น.อ.หญิง ศ.ชุตินา เนียมโก๊ะ
ศาสตราจารย์ ฝ่ายศึกษา โรงเรียนนายเรือ

ประวัติการนับ เรื่องระบบของจำนวน ซึ่งหมายรวมถึง การอ่านจำนวน การใช้สัญลักษณ์แทนจำนวน กฎหรือหลักการในการรวมสัญลักษณ์และการให้ชื่อจำนวน ระบบจำนวนเริ่มแรกนั้นเกิดขึ้นและถูกใช้มาก่อนยุคประวัติศาสตร์สัญลักษณ์ตัวแรกที่ใช้คือ | ใช้น้อยขีดนี้บนก้อนหินหน้าผา หรือทำรอยบากบนต้นไม้

ตามประวัติศาสตร์จำนวนและตัวเลขได้พัฒนาตลอดมา ระบบของจำนวนที่เราน่าจะศึกษาอย่างสั้น ๆ ก็คือ ระบบของอียิปต์ และโรมัน เพราะอียิปต์และโรมันโบราณนั้นมีอารยธรรมและความเจริญสูงมาหลายพันปีแล้ว ในอียิปต์มีการเขียนรูปภาพเป็นภาษาบรรยายเหตุการณ์ในสมัยนั้น เรียกว่า Hieroglyphics ส่วนตัวเลขอียิปต์เป็นแบบง่าย ๆ ใช้ขีด | แทนหนึ่ง, สัญลักษณ์ II แทนสอง, ใช้ III แทนสาม และ IIIIIIIII แทนเก้า มากกว่านี้ยุ่งยากในการเขียน จึงใช้สัญลักษณ์กระดุกสันเท๋่า 𐍌 แทนสิบ และใช้หลักการของการบวก คือการเขียนซ้ำ เป็นสัญลักษณ์ของจำนวนต่อไป เช่น 𐍌𐍌 แทนสิบสอง ใช้ 𐍌𐍌𐍌 แทนยี่สิบ เป็นต้น

สำหรับจำนวนในระบบโรมันนั้น มีสัญลักษณ์พื้นฐานอยู่เจ็ดตัวคือ

I	V	X	L	C	D	M
๑	๕	๑๐	๕๐	๑๐๐	๕๐๐	๑๐๐๐

ระบบโรมันใช้หลักการบวก คือ การใช้ตัวซ้ำในการเขียน เลขทั้งหมดเช่นเดียวกันคือ

$$XXII = ๑๐ + ๑๐ + ๑ + ๑ = ๒๒$$

$$MDCCVIII = ๑๐๐๐ + ๕๐๐ + ๑๐๐ + ๑๐๐ + ๕ + ๑ + ๑ + ๑ = ๑,๗๐๘$$

สำหรับการเขียนตัวเลขมาก ๆ ของระบบโรมันหลักการที่นำมาใช้คือ การคูณโดยวิธีของตนเอง และหนึ่งในวิธีการที่ใช้ คือ การคูณเลขสองจำนวนโดยการบวก

ปัจจุบันเทคโนโลยีสมัยใหม่ช่วยให้การคำนวณรวดเร็วขึ้นจากการใช้เครื่องคำนวณหรือเครื่องคอมพิวเตอร์ แต่เมื่อมองย้อนกลับไปสมัยโรมัน ชาวอียิปต์โบราณซึ่งยังไม่เคยรู้จักระบบเลขฐานสอง (Binary System) หรือเครื่องมือที่ใช้ในการคำนวณอื่นเลย แต่เขาสามารถใช้วิธีทางคณิตศาสตร์แบบโบราณของเขาหาคำตอบของการคูณได้ ซึ่งเป็นความสามารถที่น่าสนใจ! อย่างยิ่ง

ในที่นี้จะนำคณิตศาสตร์แบบโบราณ การคูณเลขสองจำนวนโดยการบวกมาแสดงให้เห็น และเปรียบเทียบกับวิธีการคูณแบบเลขฐานสิบ, เลขฐานสอง และเครื่องคำนวณ ซึ่งให้คำตอบเดียวกัน

โจทย์คือ ๑๗๗×๒๓ มีค่าเท่าใด

ถ้าพิจารณาเลขสองจำนวนนี้ โดยเขียนเป็นเลขโรมัน คือ $๑๗๗ = \text{CLXXVII}$ และ $๒๓ = \text{XXIII}$ เมื่อนำมาบวกกันจะง่ายมาก คือบวกกันตรง ๆ โดยการเขียนเลขซ้ำ แต่ถ้านำมาคูณกัน ชาวโรมันจะมีวิธีการคูณของตนเอง ซึ่งการค้นพบมาจากการลองผิดลองถูกนั่นเอง และเป็นวิธีการที่ถูกต้องใช้งานได้อีกด้วย โดยชาวโรมันไม่รู้ว่าจะทำไมถึงเป็นเช่นนั้น

ลองพิจารณาการคูณ ๑๗๗×๒๓ โดยใช้เลขฐานสิบ แต่เป็นวิธีโรมันโบราณโดยตั้งเป็น ๒ คอลัมน์ ๑๗๗ เป็นคอลัมน์อยู่ทางซ้ายและ ๒๓ เป็นคอลัมน์อยู่ทางขวา ให้หาค่าครึ่งหนึ่งของคอลัมน์ซ้าย และสองเท่าของคอลัมน์ขวา โดยเขียนเรียงตามกันลงมาด้านล่าง ในคอลัมน์ซ้าย ถ้าจำนวนเป็นเลขคู่ การหาค่าครึ่งหนึ่งจะมีเศษให้พิเศษทิ้ง ทำการคำนวณเช่นนี้ซ้ำกันหลายครั้ง ดังนี้

(๒ หาร)	๑๗๗	X	๒๓	(๒ คูณ)
	๘๘		๔๖	
	๔๔		๙๒	
	๒๒		๑๘๔	
	๑๑		๓๖๘	
	๕		๗๓๖	
	๒		๑๔๗๒	
	๑		๒๙๔๔	

ต่อมาให้ตัดจำนวนเลขในคอลัมน์ขวาที่สอดคล้องกับจำนวนเลขในคอลัมน์ซ้ายที่เป็นเลขคู่ทิ้ง

๑๗๗	X	๒๓	
๘๘		๔๖	
๔๔		๙๒	
๒๒		๑๘๔	
๑๑		๓๖๘	
๕		๗๓๖	
๒		๑๔๗๒	
๑		๒๙๔๔	

ให้นำจำนวนเลขที่เหลือในคอลัมน์ขวามาบวกกันจะได้

$$๒๓ + ๓๖๘ + ๗๓๖ + ๑๔๗๒ = ๔๐๗๑$$

นั่นคือ $๑๗๗ \times ๒๓ = ๔๐๗๑$ ซึ่งเป็นวิธีการลดรูปการคูณเลข ๒ จำนวน โดยใช้การบวก (Multiplication of two numbers to addition) วิธีการที่แสดงให้เห็นข้างบนนี้เรียกว่าวิธี คูณสองและหารสอง (Doubling and Halving) ซึ่งวิธีการนี้นำมาจากวิธีคณิตศาสตร์ของชาวโรมัน เขาใช้วิธีคูณสองและหารสองนี้กับเลขโรมัน เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ของการคูณ เพราะการคูณด้วย ๒ ในเลขโรมันจะง่ายมาก คือเขียนตัวเลขซ้ำกัน เช่น XXIII เมื่อคูณด้วย ๒ จะได้ XXXXVI และถ้าคูณด้วย ๒ ซ้ำอีกจะได้ LXXXXII หรือ XCII (เลขโรมันเขียน ๔ = IIII, ๕ = XXXX สำหรับ ๔ = IV พบว่ามีใช้ในสมัยกลาง) ดังนั้น วิธีการคูณเลขสองจำนวน ๑๗๗×๒๓ ด้วยการบวกของเลขโรมันให้ตั้งเป็น ๒ คอลัมน์เขียนด้วยเลขโรมัน คือคอลัมน์ซ้ายเขียน CLXXVII และคอลัมน์ขวาเขียน XXIII แล้วใช้หลักการคูณสองและหารสอง ดังที่แสดงกับเลขฐานสิบข้างต้น จะได้ผลลัพธ์คือ MMMMLXXI ซึ่งเท่ากับ ๔๐๗๑ เช่นเดียวกัน

การคูณเลขสองจำนวนโดยการบวก ด้วยวิธีคูณสองและหารสองของชาวโรมันนี้ ปัจจุบันมีผู้ค้นพบเหตุผลว่าทำไมวิธีการดังกล่าวจึงถูกต้องและสามารถนำมาใช้งานได้ เพราะวิธีดังกล่าวสอดคล้องกับหลักของเลขฐานสองนั่นเอง

พิจารณาการกระจายเลข ดังนี้

ถ้า จำนวน ๑๗๗ กระจายในรูป ๑๐^N

เขียนได้เป็น $๑๗๗ = ๗ \times ๑๐^๑ + ๗ \times ๑๐^๐ + ๑ \times ๑๐^๒$

แต่เราจะกระจาย ๑๗๗ ในรูป ๒^N คือ

	N	๒^N
	๐	๑
	๑	๒
	๒	๔ = ๒ X ๒
	๓	๘ = ๒ X ๒ X ๒
	๔	๑๖ = ๒ X ๒ X ๒ X ๒
	๕	๓๒ = ๒ X ๒ X ๒ X ๒ X ๒
	๖	๖๔
	๗	๑๒๘
	⋮	⋮

ในกรณีนี้

$$\begin{aligned}
 ๑๗๗ &= ๑๒๘ + ๓๒ + ๑๖ + ๑ \\
 &= ๒^๗ + ๒^๕ + ๒^๔ + ๒^๐ \\
 &= ๑ \times ๒^๗ + ๐ \times ๒^๖ + ๑ \times ๒^๕ + ๑ \times ๒^๔ + ๐ \times ๒^๓ \\
 &\quad + ๐ \times ๒^๒ + ๐ \times ๒^๑ + ๑ \times ๒^๐
 \end{aligned}$$

ดังนั้นสามารถแปลง จำนวน ๑๗๗ เป็นเลขฐานสองได้ดังนี้

$$๑๗๗ = ๑๐๐๑๑๐๐๑๒$$

ข้อสังเกต ถ้าตัวสุดท้ายของเลขฐานสอง คือ ๑ จะได้เลขฐาน ๑๐ เป็นเลขคี่ และถ้าเป็นเลข ๐ จะได้เลขฐาน ๑๐ เป็น เลขคู่ ดังนั้น การตัดตัวท้ายของเลขฐานสองที่สร้างขึ้นใหม่ โดยใช้คุณสมบัติ ๒ ข้อ คือ

ก. เลขฐานสองจำนวนเดียวกัน สามารถเขียนเป็นเลขจำนวนคู่และคี่ได้ดังนี้

$$๑๗๗ = ๑๐๑๑๐๐๐๑ \text{ (เลขคี่)}$$

และ $๑๗๖ = ๑๐๑๑๐๐๐๐ \text{ (เลขคู่)}$

เมื่อหาค่าครึ่งหนึ่งหรือหารด้วย ๒ (ตัดเศษทิ้ง) จะได้

$$๘๘ = ๑๐๑๑๐๐๐$$

$$๔๔ = ๑๐๑๑๐๐$$

$$๒๒ = ๑๐๑๑๐$$

$$๑๑ = ๑๐๑๑$$

$$๕ = ๑๐๑$$

$$๒ = ๑๐$$

$$๑ = ๑$$

ข. ในจำนวนนี้ ตัวเลขฐานสิบแต่ละตัวจะอยู่ในระดับที่ต่ำกว่า ๑ ชั้น คือ เริ่มต้นจาก

เลข ๒ จะกลายเป็น เลข ๑

เลข ๔ กลายเป็น เลข ๒

เลข ๘ กลายเป็น เลข ๔

เลข ๑๖ กลายเป็น เลข ๘ และต่อ ๆ ไป

นั่นหมายความว่า ถ้าจำนวนเดิมเป็นเลขคู่ จำนวนใหม่จะคือครึ่งหนึ่งของจำนวนเดิม (ไม่มีเศษ) และถ้าจำนวนเดิมเป็นเลขคี่ จำนวนใหม่คือ ครึ่งหนึ่งของจำนวนเดิม (ตัดเศษทิ้ง) สอดคล้องกันทั้งเลขฐานสิบและเลขฐานสอง

ดังนั้น เมื่อเราหารด้วย ๒ แล้วตัดเศษ (ถ้ามี) ทิ้ง เราจะได้คำตอบ เป็นเลขจำนวนซึ่งแทนด้วยเลขฐานสอง โดยเขียน ตารางเปรียบเทียบการคูณเลขโดยการบวกด้วยวิธีคูณสองและหารสองของชาวโรมัน ซึ่งสอดคล้องกับเลขฐานสอง ดังนี้

๑๗๗	(๑๐๑๑๐๐๐๑)	X	๒๓		
๘๘				(๑๐๑๑๐๐๐)	๔๖
๔๔				(๑๐๑๑๐๐)	๙๒
๒๒				(๑๐๑๑๐)	๑๘๔
๑๑	(๑๐๑๑)		๓๖๘		
๕	(๑๐๑)		๗๓๖		
๒				(๑๐)	๑๘๗๒
๑	(๑)		๒๙๔๔		

ข้อสังเกต เมื่อไรก็ตาม ถ้าจำนวนในคอลัมน์ทางซ้ายเป็นเลขที่ ตัวเลขสุดท้ายของเลขฐานสองก็คือ ๑ ถ้านำจำนวนตัวเลขในคอลัมน์ขวาที่ตรงกับเลขฐานสองที่ลงท้ายด้วย ๑ ในคอลัมน์ซ้ายมาบวกกันจะได้คำตอบที่ต้องการ

พิจารณาการคูณเลข ๑๗๗ และ ๒๓ โดยระบบเลขฐานสิบเปรียบเทียบกับเลขฐานสอง ดังนี้

จากจำนวน ๑๗๗ จะเห็นว่าหลักหน่วยคือ ๗ หลักสิบคือ ๗ และหลักร้อยคือ ๑ เขียนกระจายเทอมได้คือ

$$\begin{aligned}
 ๑๗๗ &= (๗ \times ๑) + (๗ \times ๑๐) + (๑ \times ๑๐๐) \\
 \text{ดังนั้น } ๑๗๗ \times ๒๓ &= ((๗ \times ๑) \times ๒๓) + ((๗ \times ๑๐) \times ๒๓) + ((๑ \times ๑๐๐) \times ๒๓) \\
 &= (๗ \times ๒๓) + (๗ \times ๒๓๐) + (๑ \times ๒๓๐๐)
 \end{aligned}$$

หมายความว่า การคูณที่ซับซ้อนถูกกระจายแล้วลดรูปเป็นอนุกรมของการคูณง่าย ๆ แล้วตามด้วยการบวกง่าย ๆ

ในระบบเลขฐานสอง ๑, ๑๐, ๑๐๐, ๑๐๐๐, ๑๐๐๐๐, ก็คือ เลข ๒ ยกกำลังคู่ในเลขฐานสิบ ดังนี้

เลขฐานสอง	เลขฐานสิบ
๑	๑
๑๐	๒
๑๐๐	๔
๑๐๐๐	๘
๑๐๐๐๐	๑๖
๑๐๐๐๐๐	๓๒

จากวิธีการคูณด้วยการกระจายคล้ายกันของเลขจำนวนนี้คือ

$$๑๐๑๑๐๐๐๑ \times ๒๓$$

โดยทุก ๆ ตัวเลข ๑ ใน ๑๐๑๑๐๐๐๑ จะถูกคูณด้วย ๒๓ ในรูปของเลข ๒ ยกกำลัง แล้วจึงนำมาบวกกัน ซึ่งมีเลข ๑ ทั้งหมด ๔ ตัว จะบวกกัน ๔ เทอม โดยเริ่มจาก ๒ ยกกำลังน้อยที่สุด

$$\begin{aligned}
 ๑๐๑๑๐๐๐๑ &= ๑ \times ๒^๐ + ๐ \times ๒^๑ + ๐ \times ๒^๒ + ๐ \times ๒^๓ + ๑ \times ๒^๔ + ๑ \times ๒^๕ \\
 &\quad + ๐ \times ๒^๖ + ๑ \times ๒^๗ \\
 &= (๑ \times ๒^๐) + (๑ \times ๒^๔) + (๑ \times ๒^๕) + (๑ \times ๒^๗) \\
 ๑๐๑๑๐๐๐๑ \times ๒๓ &= ((๑ \times ๒^๐) \times ๒๓) + ((๑ \times ๒^๔) \times ๒๓) + ((๑ \times ๒^๕) \times ๒๓) \\
 &\quad + ((๑ \times ๒^๗) \times ๒๓) \\
 &= (๒^๐ \times ๒๓) + (๒^๔ \times ๒๓) + (๒^๕ \times ๒๓) + (๒^๗ \times ๒๓) \\
 &= (๒^๐ + ๒^๔ + ๒^๕ + ๒^๗) \times ๒๓ \\
 &= (๑ + ๑๖ + ๓๒ + ๑๒๘) \times ๒๓ \\
 &= ๑๗๗ \times ๒๓
 \end{aligned}$$

สรุป ถึงแม้ว่าชาวโรมันสมัยก่อนจะยังไม่มีความรู้เกี่ยวกับระบบเลขฐานสอง รู้แต่เพียงว่าวิธีการคูณแบบการบวกที่เขารู้กันอยู่นั้นถูกต้อง ใช้งานได้ดีโดยที่วิธีการกลับมาสอดคล้องกับระบบเลขฐานสอง ซึ่งใช้งานในระบบอิเล็กทรอนิกส์คอมพิวเตอร์ในปัจจุบันได้ จึงเป็นเรื่องที่น่าสนใจอย่างยิ่งว่าเทคโนโลยีที่โลกสมัยใหม่กำลังดัดแปลงแก้ไขใช้ความรู้ความสามารถพัฒนาให้ก้าวหน้ากันอยู่ขณะนี้มันเป็นความก้าวหน้าจริง ๆ หรือถอยหลังกลับไปสู่ยุคโบราณที่มีผู้ค้นคิดไว้แล้วกันแน่ ผู้ที่ต้องการศึกษาเกี่ยวกับคณิตศาสตร์แบบโบราณ และวิธีการคำนวณสามารถสืบค้นรายละเอียดเกี่ยวกับ Rhind Papyrus ในหนังสือ Prometheus books 2007 โดย Peter E. Rudman
