การวิเคราะห์ Thermal Stress

น.อ.รศ. ภาณุฤทธิ์ ยุกตะทัต
รองศาสตราจารย์ ฝ่ายศึกษา โรงเรียนนายเรือ

ปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์จำนวนไม่น้อยที่เกี่ยวข้องกับศาสตร์มากกว่าหนึ่งแขนงขึ้นไป การเสียรูปและความเค้นในโครงสร้างของของแข็งอันเป็นผลมาจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไป (Thermal Stress) เป็นปัญหาระหว่างศาสตร์สองแขนงซึ่งมักเกิดขึ้นโดยทั่วไป เช่น ความเค้นที่เกิดขึ้นในเครื่องยนต์เนื่องจากอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้นหลังจากการสตาร์ทเครื่อง หรือการเสียรูปและความเค้นที่เกิดขึ้นกับ Nozzle ของจรวดขณะทำการยิง เป็นต้น การวิเคราะห์ปัญหาในลักษณะนี้จำเป็นต้องอาศัยองค์ความรู้ในศาสตร์ของการถ่ายเทความร้อนและความแข็งแรงของของแข็งไปพร้อมกัน ในอดีตการวิเคราะห์หาลักษณะการกระจายของอุณหภูมิด้วยศาสตร์ของการถ่ายเทความร้อนเพียงอย่างเดียวก็นับว่ามีอุปสรรคมากพออยู่แล้ว ดังนั้นการวิเคราะห์ต่อเนื่องเพื่อหาการเสียรูปและความเค้นที่เกิดขึ้นจากการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิภายใต้เงื่อนไขขอบเขตใด ๆ นั้น จึงจัดว่าแทบจะเป็นไปไม่ได้เลย ในปัจจุบันเมื่อเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์เข้ามามีบทบาทเพิ่มมากขึ้น การวิเคราะห์ออกแบบงานต่าง ๆ ทางวิศวกรรมจำเป็นต้องพึ่งพาซอฟต์แวร์โปรแกรมโดยเฉพาะซอฟต์แวร์ทางด้านไฟไนต์เอลิเมนต์ วิศวกรจึงเริ่มมีขีดความสามารถในการวิเคราะห์ Thermal Stress ซึ่งเป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับศาสตร์สองแขนงได้โดยง่าย

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้เข้ามามีบทบาทต่องานออกแบบทางวิศวกรรมเป็นอย่างมาก วิศวกรในภาคอุตสาหกรรมต่าง ๆ พึ่งพาการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์ในการวิเคราะห์เพื่อบ่งบอกถึงปรากฏการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นจากการออกแบบได้โดยตรงบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ โดยไม่ต้องลองผิดลองถูกดังเช่นที่เคยทำกันในอดีต ซึ่งเป็นการลดค่าใช้จ่ายทั้งทางด้านเวลาและปริมาณของวัสดุ หลีกเลี่ยงการทดลองที่ไม่จำเป็น และที่สำคัญที่สุดคือ ชิ้นงานที่ออกแบบนั้นจะมีความถูกต้องและให้ประสิทธิภาพสูงสุดในการใช้งาน การที่ซอฟต์แวร์ EasyFEM [๑] สามารถวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อน และปัญหาของของแข็งได้ การผสมผสานองค์ความรู้ทั้งสองนี้เข้าด้วยกัน จะก่อให้เกิดศักยภาพในการวิเคราะห์ปัญหา Thermal Stress ได้อย่างมีประสิทธิภาพ ถึงแม้ว่ารูปร่างลักษณะของปัญหาและเงื่อนไขขอบเขตจะมีความซับซ้อนเพียงใด

สมการเชิงอนุพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งอธิบายการถ่ายเทความร้อนในแผ่นระนาบที่สามารถผลิตปริมาณความร้อน Q ได้เอง คือ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+Q \quad = \quad 0 \qquad (๑)$$

เมื่อ k คือ ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (Thermal Conductivity Coefficient)

[๑] ปราโมทย์ เดชะอำไพ และสุรศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช. **ไฟไนต์เอลิเมนต์อย่างง่ายพร้อมซอฟต์แวร์.** ๒๕๔๘.

ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิ T(x, y) บนแผ่นระนาบ สามารถวิเคราะห์ได้จากการแก้สมการที่ (๑) นี้ โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของปัญหานั้น ๆ อาทิเช่น กำหนดอุณหภูมิ กำหนดปริมาณฟลักซ์ กำหนดความเป็นฉนวน และการพาความร้อนตลอดขอบบางส่วนของแผ่นระนาบ ผลลัพธ์ที่ได้นี้เองจะนำไปใช้ต่อเนื่องเพื่อหาลักษณะของการเสียรูป และความเค้นที่เกิดขึ้นตามมา โดยแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่แสดงความสมดุลของแรงในแนวแกน x และแกน y บนแผ่นโลหะ

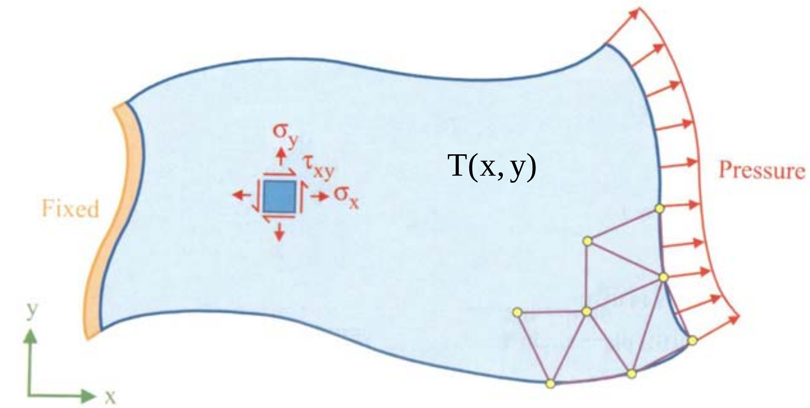
สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งอธิบายความสมดุลของแรงในแนวแกน x และ y บนแผ่นระนาบ เมื่อไม่คิดน้ำหนักของตัวเอง คือ

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0\end{aligned} \qquad \text{———— (๒)}$$

เมื่อ σ_x และ σ_y คือ ความเค้นฉาก (Normal Stress) ในแนวแกน x และแกน y ตามลำดับ

τ_{xy} คือ ค่าความเค้นเฉือน (Shearing Stress)

สำหรับแผ่นระนาบรูปร่างลักษณะใดๆ ดังรูปที่ ๑ นอกจากการเสียรูปจะเกิดขึ้นจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปแล้ว ยังอาจเสียรูปเพิ่มเติมมากขึ้นเนื่องจากแรงภายนอกมากระทำได้อีกด้วย



รูปที่ ๑ โดเมนและเงื่อนไขขอบเขต พร้อมอุณหภูมิบนแผ่นระนาบ

ในกรณีเช่นนี้ ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นย่อยและความเครียดย่อย คือ

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x-\alpha(T-T_0) \\ \varepsilon_y-\alpha(T-T_0) \\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \qquad \text{———— (๓)}$$

เมื่อ E คือ ค่าโมดูลัสของยัง (Young's modulus) หรือโมดูลัสของความยืดหยุ่น

ν คือ ค่าอัตราส่วนปัวซอง (Poisson's ratio)

ε_x และ ε_y คือ ความเครียดฉาก (Normal Strain) ในแนวแกน x และแกน y ตามลำดับ

γ_{xy} คือ ค่าความเครียดเฉือน (Shearing Strain)

α คือ สัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ (Coefficient of thermal expansion)

T_0 คือ อุณหภูมิอ้างอิงที่แผ่นระนาบไม่เกิดความเค้น (Reference Temperature)

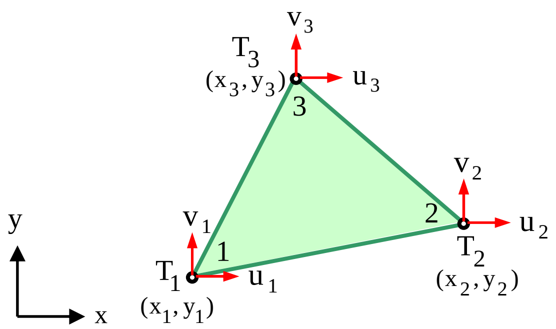
ค่าความเครียดเหล่านี้เขียนให้อยู่ในรูปแบบของค่าการเสียรูป u และ v ในแนวแกน x และแกน y ได้ คือ

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \; : \; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \; : \; \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{———— (๔)}$$

เมื่อพิจารณาสมการ (๑) – (๔) จะเข้าใจได้ว่า กระบวนการจะเริ่มต้นจากการคำนวณหาลักษณะการกระจายของอุณหภูมิ T = T(x, y) จากสมการ (๑) ก่อน ผลจากอุณหภูมิ T นี้เองที่แฝงอยู่ในสมการ (๓) ซึ่งอธิบายลักษณะของความเค้นย่อยที่จำเป็นต้องแก้จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในสมการ (๒) เพียง ๒ สมการ เนื่องจาก ตัวไม่รู้ค่า (Unknown) ในระนาบมี ๒ ค่า คือค่าการเสียรูป u = u (x, y) และ v = v (x, y) เท่านั้น เมื่อทราบค่า u และ v แล้ว จะสามารถนำไปคำนวณค่าความเครียดและความเค้นย่อยต่างๆ ได้ จากสมการ (๔)

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

หลังจากการแบ่งรูปแบบของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมย่อย ๆ แล้ว รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกิดขึ้นนี้สามารถใช้ในการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนไปพร้อมกับการเสียรูป และความเค้นที่เกิดขึ้นตามมา ประโยชน์ที่เห็นได้อย่างชัดเจนคือการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เดียวกันกับการวิเคราะห์ปัญหาสองแบบที่แตกต่างกัน โดยผลลัพธ์ของอุณหภูมิที่โหนดต่าง ๆ ซึ่งเกิดจากการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนสามารถส่งผ่านไปใช้วิเคราะห์การเสียรูปและความเค้นได้โดยตรง ดังแสดงตามรูปที่ ๒



รูปที่ ๒ เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ ๓ โหนด ที่ใช้ร่วมกันระหว่างปัญหาการถ่ายเทความร้อนและปัญหาของแข็ง

การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนนั้น เริ่มจากสมมติลักษณะการกระจายของอุณหภูมิบนเอลิเมนต์ของแผ่นเรียบ ดังนี้

$$T(x,y) \quad = \quad N_1T_1 + N_2T_2 + N_3T_3$$

โดย $N_i, i = 1, 2, 3$ แทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ (Element Interpolation Functions) คือ

$$N_i(x,y) \quad = \quad \frac{1}{2A}\left(a_i + b_i x + c_i y\right)$$

ค่า A คือ พื้นที่ของเอลิเมนต์ซึ่งคำนวณได้โดยตรงจากโคออดิเนตของโหนดทั้งสาม คือ

$$A \quad = \quad \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$$

โดยสัมประสิทธิ์

$$a_1 = x_2y_3 - x_3y_2 \quad b_1 = y_2 - y_3 \quad c_1 = x_3 - x_2$$
$$a_2 = x_3y_1 - x_1y_3 \quad b_2 = y_3 - y_1 \quad c_2 = x_1 - x_3$$
$$a_3 = x_1y_2 - x_2y_1 \quad b_3 = y_1 - y_2 \quad c_3 = x_2 - x_1$$

จากนั้นประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต ดังนี้

๑) การกำหนดอุณหภูมิตลอดขอบ เช่น

$$T(x,y) \quad = \quad T_1(x,y)$$

๒) กำหนดปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ไหลเข้าสู่ขอบ

$$q_s \quad = \quad -q \quad = \quad k\frac{\partial T}{\partial x}n_x + k\frac{\partial T}{\partial y}n_y$$

โดย n_x และ n_y แทนทิศทาง cosine ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{n}$ ที่ตั้งฉากกับขอบนั้น

๓) การกำหนดว่าขอบเป็นฉนวน ไม่มีปริมาณฟลักซ์ความร้อนไหลเข้าออกได้

$$q \quad = \quad k\frac{\partial T}{\partial x}n_x + k\frac{\partial T}{\partial y}n_y \quad = \quad 0$$

๔) การกำหนดการพาความร้อนสู่ตัวกลางรอบข้าง

$$q \quad = \quad k\frac{\partial T}{\partial x}n_x + k\frac{\partial T}{\partial y}n_y \quad = \quad h(T - T_\infty)$$

โดย h คือ สัมประสิทธิ์การพาความร้อน และ T_∞ คือ อุณหภูมิเฉลี่ยของตัวกลางรอบข้าง

การใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of weight residuals) กับสมการเชิงอนุพันธ์ของการถ่ายเทความร้อน [สมการที่ (๑)] ซึ่งก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ในรูปแบบดังนี้

$$\underset{(3\times3)}{[[K_c]}+\underset{(3\times3)}{[K_h]]}\underset{(3\times1)}{\{T\}} = \underset{(3\times1)}{\{Q_Q\}}+\underset{(3\times1)}{\{Q_q\}}+\underset{(3\times1)}{\{Q_h\}}$$

โดย $[K_c]$ คือเมตริกซ์ของการนำความร้อน สำหรับเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมสามารถคำนวณได้โดยตรงจาก

$$\underset{(3\times3)}{[K_c]} = k\,A\,T\underset{(3\times2)}{[B]^T}\underset{(2\times3)}{[B]}$$

โดย t คือ ความหนาของแผ่นระนาบ และ

$$[B] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

ส่วน $[K_h]$ คือ เมตริกซ์ของการพาความร้อน สำหรับเอลิเมนต์ที่ติดอยู่กับขอบและมีการพาความร้อนเข้าหรือออกสู่ตัวกลางรอบข้าง เช่น หากขอบเอลิเมนต์ที่มีการพาความร้อนมีความยาว ℓ ซึ่งอยู่ระหว่างโหนด ๑ และ ๒ เมตริกซ์ของการพาความร้อนที่เกิดขึ้นนี้ คือ

$$[K_h] = \frac{h\,t\,\ell}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

และโหลดเวกเตอร์ของการพาความร้อน $\{Q_h\}$ ที่สอดคล้องกัน คือ

$$\{Q_h\} = \frac{h\,t\,\ell\,T_\infty}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

อย่างไรก็ตาม หากปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ไม่มีการพาความร้อนตามขอบ จะไม่ปรากฏเมตริกซ์ $[K_h]$ และเวกเตอร์ $\{Q_h\}$ ในสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับโหลดเวกเตอร์ที่เหลือทางด้านขวาของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ คือ $\{Q_Q\}$ คือ ปริมาณฟลักซ์ความร้อนอันเนื่องมาจากการผลิตความร้อน Q ภายในเอลิเมนต์นั้นเอง โดย

$$\{Q_Q\} = \frac{Q\,A\,t}{3}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

และ $\{Q_q\}$ คือโหลดเวกเตอร์จากการกำหนดปริมาณฟลักซ์ความร้อน q_s ที่เข้าสู่ขอบ เช่น หากขอบเอลิเมนต์ที่มีการกำหนดปริมาณฟลักซ์ความร้อนนี้ยาว ℓ และอยู่ระหว่างโหนดหมายเลข ๒ และ ๓ แล้ว โหลดเวกเตอร์นี้ คือ

$$\{Q_q\} = \frac{q_s\,t\,\ell}{2}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

การคำนวณเพื่อหาผลลัพธ์นั้น โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ฝังตัวอยู่ในซอฟต์แวร์ EasyFEM จะเป็นตัวดำเนินการ โดยสมการไฟไนต์เอลิเมนต์นี้จะถูกสร้างขึ้นสำหรับทุกเอลิเมนต์ แล้วจึงประกอบรวมกันขึ้นเป็นระบบสมการขนาดใหญ่ จากนั้นจึงแก้สมการเพื่อหาค่าอุณหภูมิที่โหนดต่าง ๆ เพื่อนำไปใช้ในการวิเคราะห์หาการเสียรูปและความเค้นต่อไป

การวิเคราะห์หาการเสียรูปและความเค้นในแผ่นระนาบอันเนื่องมาจากอุณหภูมิ จะเริ่มจากการสมมติการเสียรูป u และ v บนเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ลักษณะการกระจายของค่าการเสียรูปในเอลิเมนต์บนแผ่นเรียบ (Flat plane) คือ

$$u(x, y) = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3$$
$$v(x, y) = N_1v_1 + N_2v_2 + N_3v_3$$

โดย $N_i : i = 1, 2, 3$ แทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ (Interpolation Function) ซึ่งคือ

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2A}\left(a_i + b_i x + c_i y\right)$$

เมื่อ A คือพื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม และ a_i, b_i, c_i ขึ้นอยู่กับโคออดิเนต x_i และ y_i ที่โหนด i ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยตรงจากตำแหน่งของโหนด ที่เกิดขึ้นหลังจากสร้างรูปแบบของไฟไนต์เอลิเมนต์แล้ว ดังนี้

$$A = \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$$

โดยสัมประสิทธิ์

$$a_1 = x_2y_3 - x_3y_2 \quad b_1 = y_2 - y_3 \quad c_1 = x_3 - x_2$$
$$a_2 = x_3y_1 - x_1y_3 \quad b_2 = y_3 - y_1 \quad c_2 = x_1 - x_3$$
$$a_3 = x_1y_2 - x_2y_1 \quad b_3 = y_1 - y_2 \quad c_3 = x_2 - x_1$$

หลังจากประยุกต์ใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างเข้ากับสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับการสมดุลของแรง [สมการที่ (๒)] และใช้การกระจายของการเสียรูปสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ ก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังนี้

$$\underset{(6\times 6)}{[K]}\ \underset{(6\times 1)}{\{\delta\}} = \underset{(6\times 1)}{\{F\}} + \underset{(6\times 1)}{\{F_T\}}$$

เมื่อ [K] คือ เมตริกซ์ของความแข็งเกร็ง คือ

$$\underset{(6\times 6)}{[K]} = \underset{(6\times 3)}{[B]^T}\ \underset{(3\times 3)}{[C]}\ \underset{(3\times 6)}{[B]}\, t\, A$$

[B] คือ เมตริกซ์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและค่าการเสียรูป คือ

$$[B] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

[C] คือ เมตริกซ์ขนาด 3×3 ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด ส่วนค่า t คือความหนาของแผ่นระนาบ

$\{\delta\}$ คือ เวกเตอร์ที่ประกอบด้วยค่าการเสียรูป u และ v ที่โหนดทั้งสามบนเอลิเมนต์ คือ

$$\lfloor\delta\rfloor = \lfloor u_1 \;\; v_1 \;\; u_2 \;\; v_2 \;\; u_3 \;\; v_3\rfloor$$

{F} คือ โหลดเวกเตอร์ ซึ่งเกิดขึ้นจากแรงทางกล หรือแรงดันที่กำหนดให้ตามขอบ

$\{F_T\}$ คือ โหลดเวกเตอร์อันเนื่องมาจากอุณหภูมิ

$$\{F_T\} = [B]^T[C]\{\alpha\}(T_{avg} - T_0)\, t\, A$$

โดย $[\alpha] = [\alpha \quad \alpha \quad 0]$

$$T_{avg} = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3}$$

หลังจากสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของแต่ละเอลิเมนต์ขึ้นแล้ว จึงนำสมการเหล่านี้มารวมกันให้เป็นระบบสมการขนาดใหญ่ จากนั้นจึงประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดสำหรับปัญหานั้น ๆ เช่น บางโหนดอาจถูกตรึงแน่นทั้งในแนวแกน x และแกน y บางโหนดอาจถูกตรึงในแนวแกน y เพียงทิศทางเดียว ขณะที่ยังสามารถเคลื่อนตัวในแนวแกน x ได้ เมื่อประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ แล้ว จึงแก้ระบบสมการขนาดใหญ่เพื่อหาค่าการเสียรูป u และ v ของทุก ๆ โหนด

เมื่อทราบค่าการเสียรูป u และ v ของทุกโหนดแล้ว จะสามารถหาค่าความเครียด $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ ได้ แล้วจึงหาค่าความเค้นย่อย $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ของแต่ละเอลิเมนต์ ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการสั้น ๆ ได้ คือ

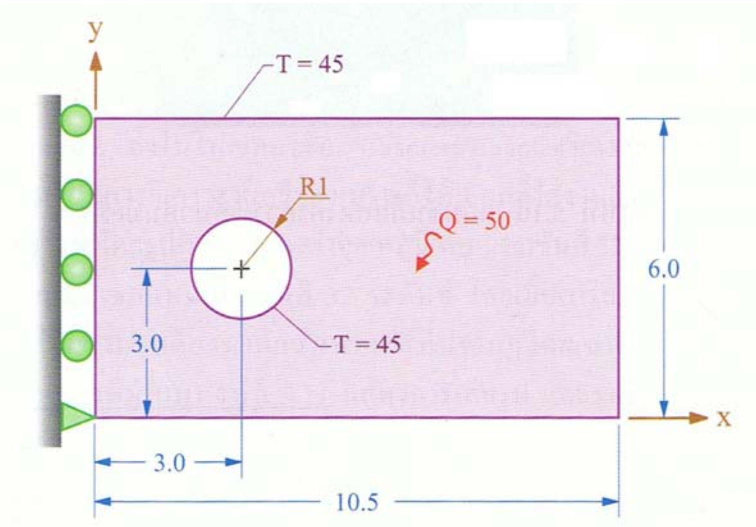
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \underset{(3\times3)}{[C]}\left(\underset{(3\times6)}{\{B\}}\;\underset{(6\times1)}{\{\delta\}} - \underset{(3\times1)}{\{\alpha\}}(T_{avg} - T_0)\right)$$

เมื่อมองในภาพรวมของการวิเคราะห์ Thermal Stress จะพบว่าเป็นกระบวนการที่ดำเนินไปอย่างเป็นขั้นตอน สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่าง ๆ สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยง่ายด้วยการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ซึ่งฝังตัวอยู่ในซอฟต์แวร์ EasyFEM ทำให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาทางด้านนี้ได้โดยสะดวกและรวดเร็ว โดยเฉพาะอย่างยิ่งปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนภายใต้โหลดชนิดต่าง ๆ กัน ในที่นี้จะแสดงให้เห็นตัวอย่างการใช้ซอฟต์แวร์ EasyFEM ในการวิเคราะห์ปัญหา Thermal Stress อย่างง่าย หลังจากนั้นจะแสดงให้เห็นการใช้ซอฟต์แวร์ COSMOS ในการวิเคราะห์ชิ้นงานส่วนที่เป็น

Nozzle ของจรวดระยะยิงไกลที่ออกแบบโดย ศวอ.ทอ.[๒] ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะช่วยให้สามารถคาดการณ์ได้ว่าจะเกิดอะไรขึ้นกับส่วน Nozzle บ้างในขณะที่ทำการยิงจรวดจริง (เกิดการเผาไหม้ของดินขับเชื้อเพลิงแข็ง)

ปัญหาการเสียรูปในแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมมีรู เนื่องจากอุณหภูมิ

รูปร่างของปัญหาเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าหนา ๐.๑ เมตร มีรูกลมอยู่ภายใน ดังรูปที่ ๓ ซึ่งกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (k) มีค่าเท่ากับ ๑๐๐ วัตต์ต่อเมตร-องศาเซลเซียส ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิเท่ากับ 12.7×10^{-6} เมตรต่อองศาเซลเซียส ค่าโมดูลัสของยังเท่ากับ 2.07×10^{9} นิวตันต่อตารางเมตร และค่าอัตราส่วนปัวซองเท่ากับ ๐.๒๕ อุณหภูมิอ้างอิงที่แผ่นระนาบไม่เกิดความเค้นเท่ากับ ๒๕ องศาเซลเซียส ขอบทั้งหมดของโมเดลกำหนดให้มีอุณหภูมิ ๔๕ องศาเซลเซียส ปริมาณความร้อนที่ผลิตได้เองภายในโมเดลเท่ากับ ๕๐ วัตต์ต่อลูกบาศก์เมตร และขอบโมเดลทางซ้ายมือเป็นขอบแบบสมมาตรตามแนวแกน x

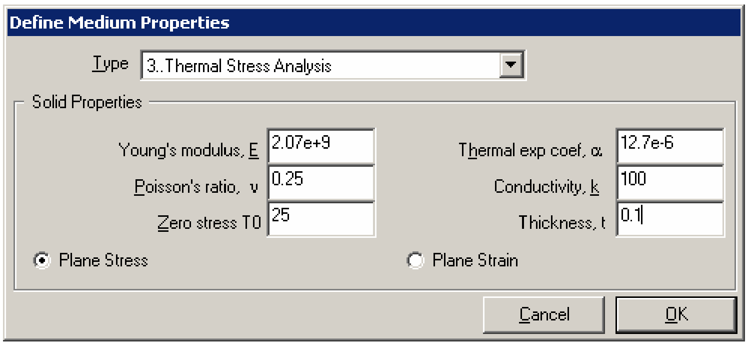


รูปที่ ๓ ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมมีรู

เมื่อทราบปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ ขั้นตอนแรกในกระบวนการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ คือ เมื่อเปิดโปรแกรม EasyFEM ขึ้นมาก็ต้องกำหนดพื้นที่สำหรับการสร้างแบบจำลองเพื่อวิเคราะห์ปัญหา โดยใช้คำสั่ง File → New จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ Define Medium Properties ซึ่งเป็นกล่องสนทนาสำหรับใส่คุณสมบัติของวัสดุสำหรับการวิเคราะห์ ให้เลือกรายการหมายเลข ๓ Thermal Stress Analysis จากนั้นให้ทำการกรอกค่าโมดูลัสของยัง อัตราส่วนปัวซอง อุณหภูมิอ้างอิง

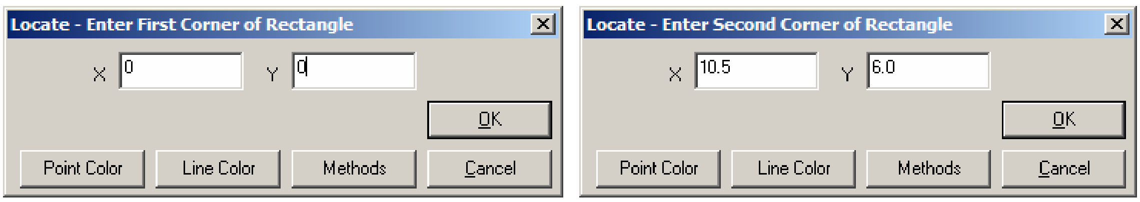
[๒] ศวอ.ทอ. **โครงการวิจัยและพัฒนาจรวดระยะยิงไกล.** ม.ป.ป.

สัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ สัมประสิทธิ์การนำความร้อน และความหนา ลงในช่องว่างต่าง ๆ ดังรูปที่ ๔ แล้วคลิก OK

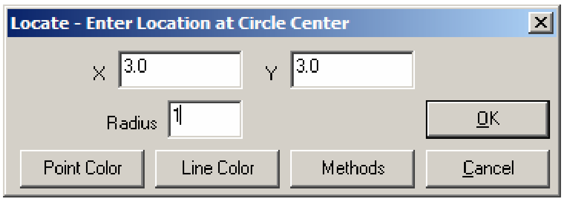


*รูปที่ ๔ ไดอะล็อกบ๊อกซ์ **Define Medium Properties***

ขั้นตอนต่อไปเป็นการสร้างโมเดล โดยเริ่มจากกำหนดจุดเริ่มต้นของแกน x-y และพิกัดจุดปลายของโดเมนที่ต้องการวิเคราะห์ การสร้างโมเดลใช้คำสั่ง Create → Line → Rectangle จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ Locate – Enter First Corner of Rectangle ให้ใส่ตัวเลขของพิกัดของจุดเท่ากับ (๐, ๐) ลงในช่อง x และ y จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ Locate – Enter Second Corner of Rectangle ให้ใส่ตัวเลขของพิกัดของจุดเท่ากับ (๑๐.๕, ๖.๐) แล้วคลิกที่ปุ่ม OK เป็นอันเสร็จกระบวนการ คลิก Cancel เพื่อปิดไดอะล็อกบ๊อกซ์ ดังแสดงตามรูปที่ ๕ จากนั้นให้ใช้คำสั่ง Create → Circle → Center เพื่อสร้างวงกลมรัศมี ๑ เป็นรูเจาะภายในแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยมีพิกัดของจุดศูนย์กลางวงกลมคือ (๓, ๓) ดังแสดงตามรูปที่ ๖

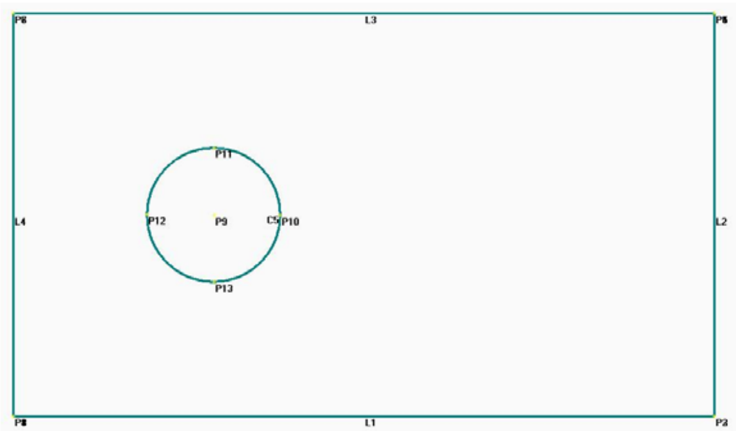


รูปที่ ๕ ไดอะล็อกบ๊อกซ์การกำหนดพิกัดมุมของสี่เหลี่ยม



รูปที่ ๖ ไดอะล็อกบ๊อกซ์การกำหนดพิกัดจุดศูนย์กลางและรัศมีของรูวงกลมภายในรูปสี่เหลี่ยม

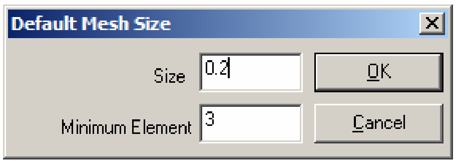
เมื่อคลิก OK ก็จะได้รูปร่างโมเดลของปัญหา ดังแสดงตามรูปที่ ๗



รูปที่ ๗ โมเดลรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีรูกลมภายใน

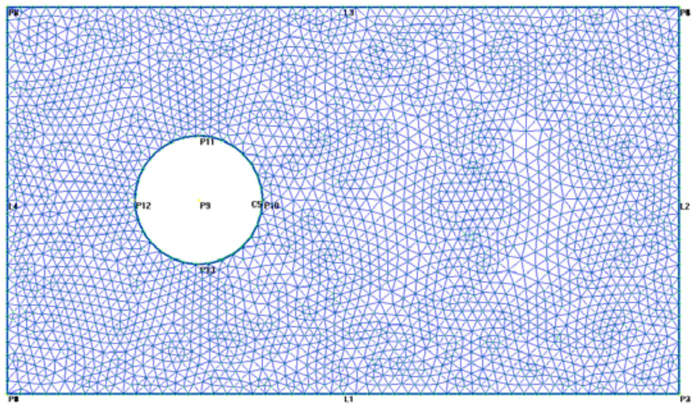
ลำดับต่อไปเป็นขั้นตอนการกำหนดขอบเขตของโดเมน (Boundary) เพื่อเตรียมสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมย่อยๆ ต่อไปด้วยการใช้คำสั่ง Mesh → Define Boundary จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ Select Curve(s) on Outer Boundary ให้ทำการเลือกเส้นขอบนอกทั้งสี่ของโมเดล (L1 ถึง L4) แล้วคลิกที่ปุ่ม OK จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ถามว่าโดเมนที่เลือกมีรูภายในหรือไม่ ให้คลิกที่ปุ่ม Yes ก็จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ให้เลือกรู คลิกที่ขอบวงกลม C5 แล้วคลิกที่ปุ่ม OK จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ถามว่าโดเมนที่เลือกมีรูภายในอีกหรือไม่ คราวนี้ให้คลิกที่ปุ่ม No

การสร้างเอลิเมนต์ย่อย ในซอฟต์แวร์ EasyFEM มีเอลิเมนต์ให้เลือกทั้งแบบที่มีระเบียบและไร้ระเบียบ สำหรับกรณีนี้ต้องการสร้างเอลิเมนต์แบบไร้ระเบียบ ให้เลือกใช้คำสั่ง Mesh → Mesh Size → Default เพื่อกำหนดขนาดของเอลิเมนต์ จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ Default Mesh Size ให้ใส่ค่า ๐.๒ ลงในช่อง Size และใส่ค่า ๓ ลงในช่อง Minimum Element ดังแสดงตามรูปที่ ๘



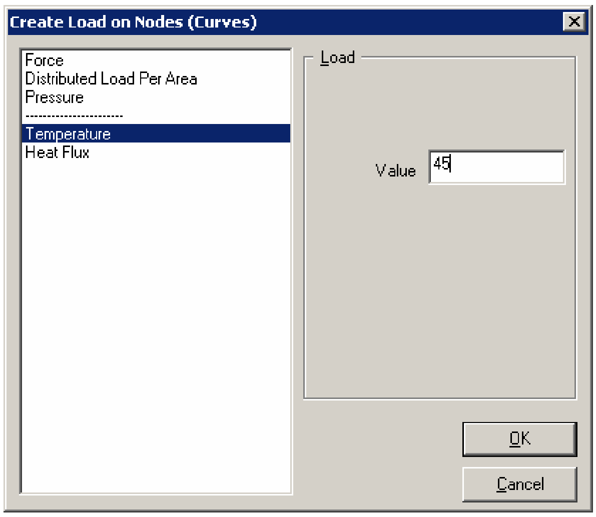
*รูปที่ ๘ ไดอะล็อกบ๊อกซ์ **Default Mesh Size***

จากนั้นจึงเลือกใช้คำสั่ง Mesh → Unstructured Mesh จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ Select Boundary(s) to Mesh ให้คลิกลงบนพื้นที่ของขอบเขตโดเมน ซึ่งขอบเขตที่ถูกเลือกจะปรากฏในไดอะล็อกบ๊อกซ์นี้ แล้วคลิกที่ปุ่ม OK โปรแกรมจะทำการสร้างเอลิเมนต์ย่อยภายในโมเดลตามขอบเขตที่กำหนด ดังรูปที่ ๙



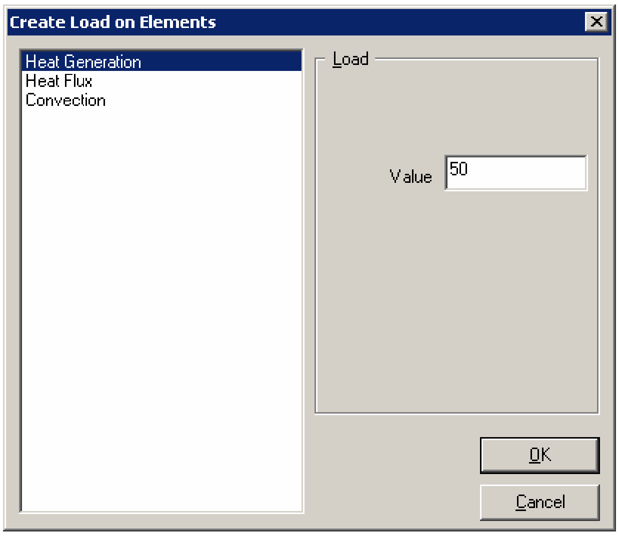
รูปที่ ๙ เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบไร้ระเบียบ

สำหรับการกำหนดโหลดตามขอบของโมเดลในปัญหานี้ เป็นการกำหนดอุณหภูมิตลอดขอบเขตโดเมนให้มีค่าเท่ากับ ๔๕ องศาเซลเซียส จึงใช้คำสั่ง Create → Load → On Node (Curve Specified) จากนั้นเลือกคลิกที่ปุ่ม Select All เพื่อเลือกเส้นตามขอบทั้งหมด แล้วคลิกที่ปุ่ม OK จากนั้นเมื่อปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ Create Load on Nodes (Curves) ให้เลือกรายการ Temperature และกำหนดค่า ๔๕ ลงในช่อง Value แล้วคลิกที่ปุ่ม OK ดังรูปที่ ๑๐



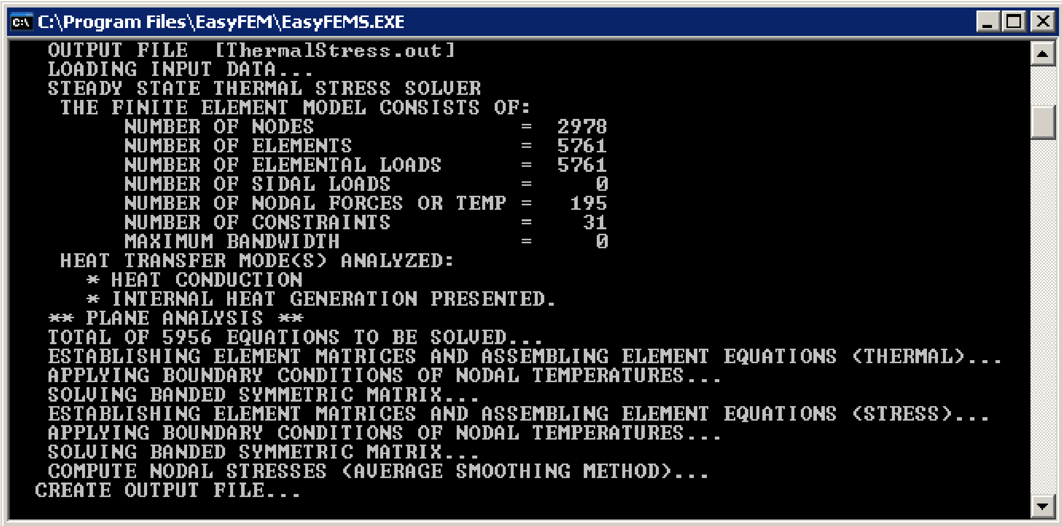
*รูปที่ ๑๐ ไดอะล็อกบ๊อกซ์ **Create Load on Nodes (Curves)***

สำหรับการกำหนดอัตราปริมาณความร้อนที่ผลิตได้เองเท่ากับ ๕๐ วัตต์ต่อลูกบาศก์เมตร ให้กับทุก ๆ เอลิเมนต์ด้วยคำสั่ง Create → Load → On Element จากนั้นให้เลือกคลิกที่ Select All เพื่อเลือกเอลิเมนต์ทั้งหมด แล้วคลิกที่ปุ่ม OK เมื่อปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ Create Load on Elements ให้เลือกที่รายการ Heat Generation และกำหนดค่า ๕๐ ลงในช่อง Value แล้วคลิกที่ปุ่ม OK ดังรูปที่ ๑๑



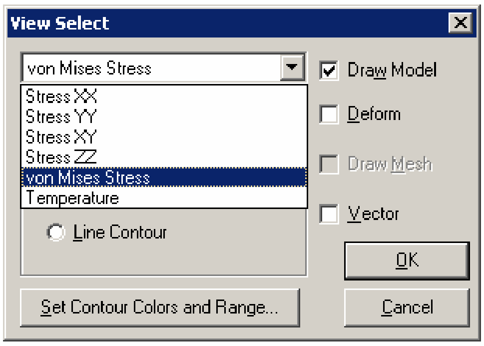
รูปที่ ๑๑ ไดอะล็อกบ๊อกซ์ Create Load on Nodes (Curves)

การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตตามขอบโมเดลให้เป็นแบบยึดแน่น ให้ใช้คำสั่ง Create → Constraint → On Node และเลือกโหนดตามขอบซ้ายมือของโมเดลทั้งหมด ยกเว้นโหนดตรงมุมล่างซ้ายมือ (โหนดหมายเลข ๑) เพราะเงื่อนไขการจับยึดที่มุมล่างซ้ายของชิ้นงานแตกต่างจากจุดอื่น ๆ บนขอบทางด้านซ้ายมือ แล้วกำหนดขอบเขตแบบสมมาตรตามแนวแกน x จากนั้นให้ใช้คำสั่งเดียวกันเพื่อกำหนดให้โหนดหมายเลข ๑ มีเงื่อนไขขอบเขตแบบยึดแน่น จากนั้นเลือกคำสั่ง File → Save เพื่อบันทึกโมเดลลงในไฟล์ชื่อ Thermal Stress แล้วจึงทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยคำสั่ง File → Analyze จะปรากฏหน้าจอแสดงการทำงาน ดังรูปที่ ๑๒

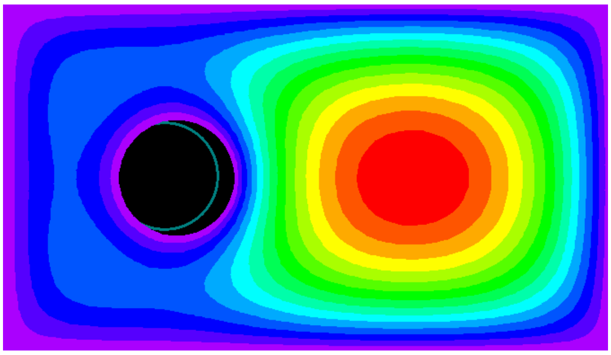


*รูปที่ ๑๒ หน้าจอแสดงการวิเคราะห์ปัญหาด้วยโปรแกรม **EasyFEM***

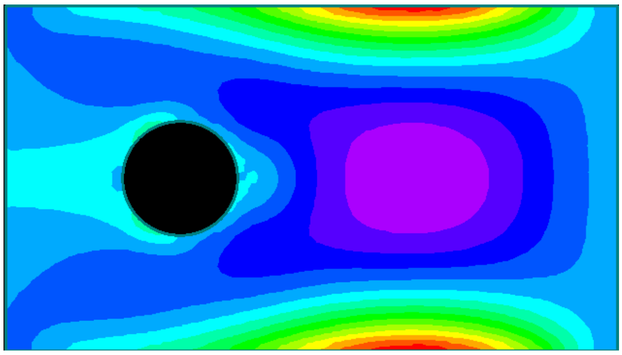
เมื่อการวิเคราะห์เสร็จสมบูรณ์ให้ใช้คำสั่ง View → Select เพื่อแสดงผลลัพธ์การวิเคราะห์ ซึ่งเมื่อปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ View Select ดังรูปที่ ๑๓ จะสามารถเลือกแสดงผลลัพธ์ได้หลายแบบ ดังตัวอย่างในรูปที่ ๑๔



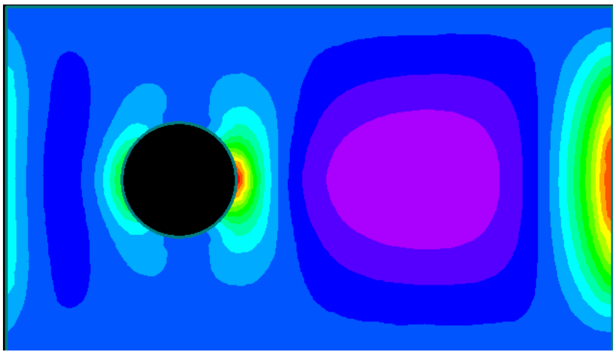
*รูปที่ ๑๓ ไดอะล็อกบ๊อกซ์ **View Select***



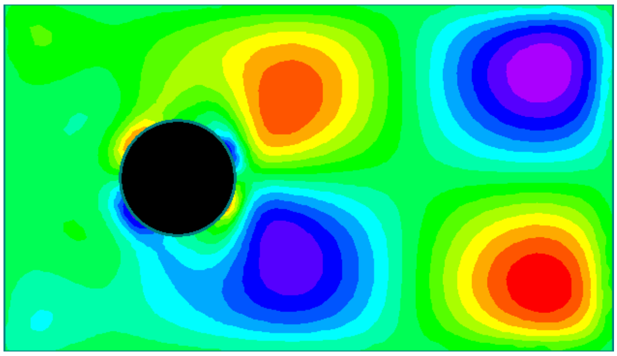
ค่าอุณหภูมิและการเสียรูป



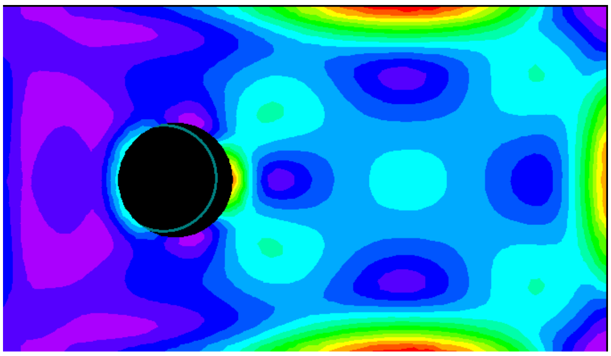
ค่าความเค้นในแนวแกน x



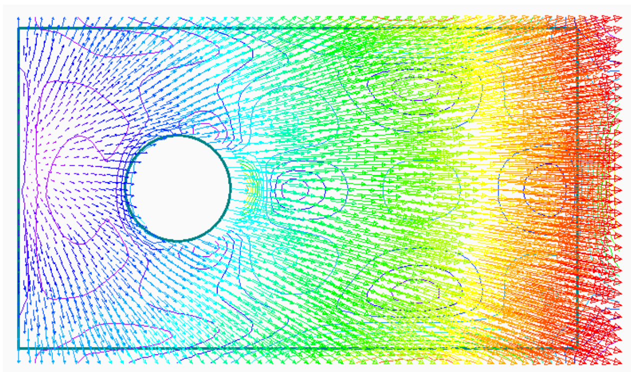
ค่าความเค้นในแนวแกน y



ค่าความเค้นเฉือน



ค่าความเค้นวอนมิสเซสและการเสียรูป

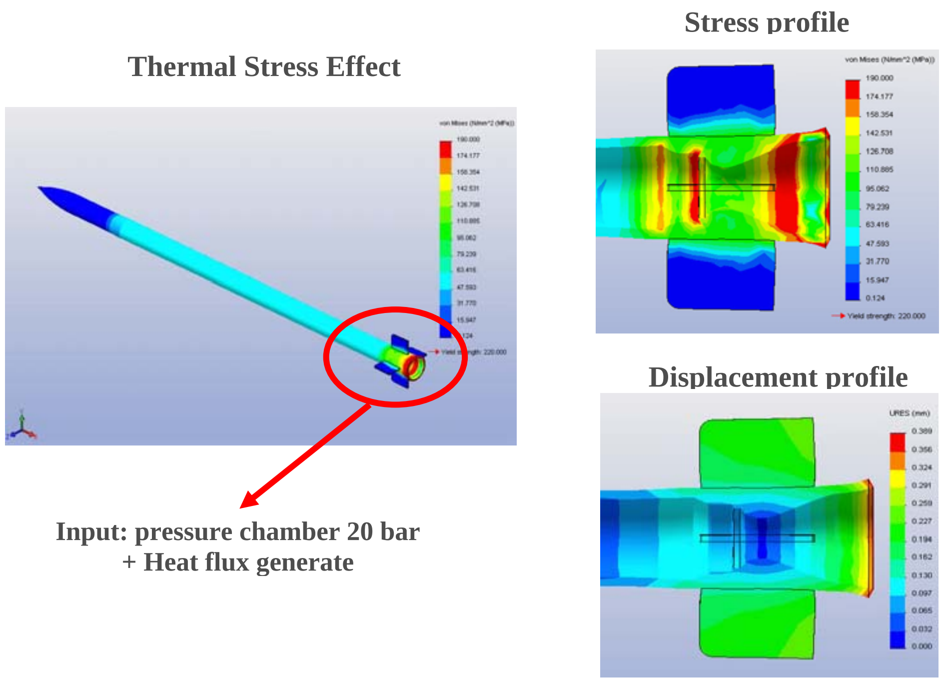


เวกเตอร์แสดงความเค้นวอนมิสเซส

รูปที่ ๑๔ แถบชั้นสีแสดงค่าต่าง ๆ ตามที่เลือกในไดอะล็อกบ๊อกซ์ View Select

การประยุกต์ใช้งาน

ผู้เขียนได้มีโอกาสทดลองวิเคราะห์ปัญหา Thermal Stress ภายในลูกจรวดระยะยิงไกลตามแบบที่ ศวอ.ทอ. ออกแบบไว้ โดยการคำนวณขนาดตามระยะยิงที่ต้องการ เพื่อให้ทราบพฤติกรรมของชิ้นงานบริเวณ Nozzle ในขณะที่เกิดการเผาไหม้ของดินขับเชื้อเพลิงแข็ง ในการวิเคราะห์เริ่มจากการสร้างโมเดลของจรวดระยะยิงไกล แต่เนื่องจากรูปร่างของปัญหามีความซับซ้อน โปรแกรม EasyFEM จึงไม่เหมาะแก่การใช้งาน ในที่นี้เลือกใช้ซอฟต์แวร์ SolidWork ในการสร้างแบบจำลอง เพราะมีความสามารถในการเข้ากันได้กับซอฟต์แวร์ในการวิเคราะห์ที่เลือกใช้ คือ COSMOS ได้ผลลัพธ์ ดังรูป



รูปที่ ๑๕ ผลการวิเคราะห์ Thermal Stress ของจรวดระยะยิงไกลขนาด ๒๓๐ มม.

บทสรุป

ผู้ที่เคยศึกษาความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิ (Thermal Stress) ย่อมตระหนักได้เป็นอย่างดีว่าการที่จะได้มาซึ่งผลลัพธ์เชิงวิเคราะห์ของการเสียรูปและความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมินั้นเป็นไปได้ยากมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งปัญหาที่มีรูปทรงซับซ้อนภายใต้เงื่อนไขขอบเขตที่ใกล้เคียงกับความเป็นจริง ซอฟต์แวร์ไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เสนอในบทความนี้ ไม่ว่าจะเป็น EasyFEM หรือ COSMOS จะช่วยให้กระบวนการวิเคราะห์ปัญหาเป็นไปได้โดยสะดวกไม่ว่ารูปทรงของชิ้นงานจะเป็นอย่างไร หรืออยู่ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตอย่างไร และยิ่งไปกว่านั้นยังแสดงให้เห็นว่าเราอาจสร้างโมเดลเพียงรูปแบบเดียว เพื่อการวิเคราะห์ทั้งปัญหาการถ่ายเทความร้อนและปัญหาการเสียรูปรวมทั้งความเค้นไปพร้อมกัน โดยผลลัพธ์ของอุณหภูมิที่

แต่ละโหนดซึ่งได้จากการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อน จะถูกส่งผ่านเข้าสู่กระบวนการวิเคราะห์การเสียรูปของชิ้นงานได้โดยตรง

เอกสารอ้างอิง

ปราโมทย์ เดชะอำไพ และสุรศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช. **ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม.** กรุงเทพ ฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, ๒๕๔๗.

ศวอ.ทอ. **โครงการวิจัยและพัฒนาจรวดระยะยิงไกล.** ม.ป.ท., ม.ป.ป.

ศูนย์บริการปรึกษาการออกแบบและวิศวกรรม (DECC). **ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ขั้นพื้นฐาน.** ม.ป.ท., ๒๕๕๐.

สวพ.กห.. **รายงานความก้าวหน้าโครงการจรวดเพื่อความมั่นคงระยะที่ ๑.** ม.ป.ท., ๒๕๕๐.